



UNIVERSITE D'ORLEANS

THÈSE
PRÉSENTÉE
À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

Discipline : *Mécanique des fluides* – Thermique – Énergétique – Combustion

par

Thierry GALLOIS

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE
INSTATIONNAIRE DE CALCUL POUR DES LIGNES
PORTANTES COURBES ET EN FLÈCHE

Soutenue le 17 Décembre 2003

MEMBRES DU JURY :

M. Jean COIRIER – Rapporteur	Professeur	ENSMA – Poitiers
M. Kirill V. ROZHDESTVENSKY – Rapporteur	Professeur	SMTU – Saint-Petersbourg
M. Michel COSTES	Ingénieur de Recherche	ONERA – Châtillon
M. Iskender GÖKALP	Directeur de Recherche	CNRS – Orléans
M. Michel MUDRY – Président du Jury	Professeur	Université d'Orléans
M. Philippe DEVINANT – Directeur de thèse	Professeur	Université d'Orléans

Remerciements

La partie consacrée aux remerciements d'une thèse revêt un caractère un peu particulier. Elle s'apparente en effet plus à un exercice diplomatique qu'à un réel opus consacré à remercier les personnes m'ayant de près ou de loin apporté leur concours. Diplomatique car, même si on a rarement vu une personne oubliée dans les remerciements venir s'en plaindre à l'auteur (quoique...), il est certainement incorrect d'omettre de remercier quelqu'un dont l'aide fut si précieuse. Diplomatique également car cette partie est probablement la seule que liront beaucoup de néophytes. Qu'ils soient déjà remerciés de s'être procuré ce mémoire et assurés que je comprends leur désarroi à la lecture des premières pages de celui-ci. Je profite de ces lignes pour conseiller amicalement à ces personnes de ne pas plonger trop profondément dans cette thèse et d'éviter plus particulièrement la page 83 du présent mémoire. Dans le cas contraire, elles pourraient nourrir l'envie d'éviter à l'avenir ma fréquentation...

Cette partie est également particulière car elle est la dernière que j'aie rédigée, signe qu'une porte se ferme sur une portion de vie... ou tout du moins ponctue finalement le chapitre de la vie étudiante !

Ce travail n'aurait donc pu être ce qu'il est sans l'aide, le soutien et la bienveillance de nombreuses personnes. Parmi celle-ci, Philippe Devinant a su m'initier aux arcanes de la ligne portante. Sa direction, ses conseils et son intérêt certain pour ce type d'approche ont permis d'accomplir ce travail dans les meilleures conditions. Je l'en remercie. Il y a quelques années, j'ai rencontré Jean Coirier. Il m'a avoué que la ligne portante était un objet qui l'avait longuement intéressé. J'espère avoir traité sa « danseuse » avec le respect qui lui est dû et je le remercie d'avoir bien voulu être associé à cette thèse. Ses précieuses corrections ont permis d'éviter de propager une idée semble-t-il particulièrement reçue. Kirill V. Rozhdestvensky a également accepté la tâche de rapporteur. Je le remercie d'avoir endossé ce rôle dans une langue qui, sans lui être totalement étrangère, n'en reste pas moins fort différente de la sienne. Je n'imagine pas lire une thèse en Russe... pas dès maintenant, en tout cas. Je remercie Iskender Gökalp de la confiance qu'il m'a portée en permettant une thèse de Docteur ingénieur au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique. Sans son aide, cette thèse n'aurait probablement pas vu le jour. La présence de Michel Costes dans le Jury de cette thèse est naturel. Sa confiance et son intérêt pour cette approche ont motivé de nombreux choix et ont permis un éclairage industriel de ces travaux ; j'espère que cette thèse répondra à certaines de ses interrogations. C'est avec plaisir et admiration que je compte dans mon Jury de thèse, Michel Mudry. Sa grande compétence dans le domaine des écoulements potentiels a guidé, notamment à Orléans, de nombreux travaux de recherche. Je ne saurais me priver de sa caution scientifique, s'il souhaite me l'accorder, ni de ses précieuses remarques dont il ne manquera pas de me faire part.

Je remercie également chaque membre du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique qui m'a accueilli durant ces années, en particulier MM Burnel et Hureau, successifs directeurs du Laboratoire, qui ont bien voulu m'accorder leur confiance et un bureau chauffé! La particulière cordialité des membres du Laboratoire aura permis un déroulement aisé de cette thèse. Je remercie pour leur soutien moral, amical voire technique tous ses membres et particulièrement Sylvie, Ivan, Stéphane, Thomas, Christophe(s) et Régine. Je remercie également Annie Leroy-Chesneau dont les conseils, la disponibilité et la gentillesse ont facilité ce travail, notamment lors des phases de validation. Un remerciement spécial pour mon voisin quotidien et ami, Olivier Lorillu, pour les nombreuses discussions qui ont égaillées nos sombres journées. Je lui souhaite bon courage pour « sa fin ».

Mes remerciements s'adressent également à mes parents dont le soutien indéfectible et leur confiance avant, pendant et après cette thèse sont un réconfort précieux. Merci également d'avoir relu fiévreusement ce mémoire pour en faire quelque chose de lisible. Pour finir, je remercie ma femme, certes pour ménager sa susceptibilité mais aussi et surtout pour son soutien moral, affectif, culinaire et aimant (surtout durant cette dernière ligne droite), pour le fils qu'elle nous donne et également pour avoir un domaine de recherche qui m'est tellement étranger qu'après avoir lu ses écrits, l'intégration en partie finie au sens d'Hadamard me paraît soudainement simple.

Si j'ai oublié de remercier quelqu'un qu'il n'hésite pas à venir me voir.

Merci à tous!

Thierry GALLOIS



Table des matières

Table des figures	v
Index des notations	vii
Introduction	1
1 Bibliographie critique	5
1.1 La ligne portante stationnaire de Prandtl	6
1.1.1 Une théorie heuristique	6
1.1.2 Les mises en œuvre de la théorie de Prandtl	8
1.2 La nature du sillage en fluide parfait instationnaire	11
1.3 Formulation asymptotique de la ligne portante	13
1.3.1 Théorie asymptotique stationnaire pour une aile droite	13
1.3.2 Théorie asymptotique stationnaire pour des ailes courbes et en flèche	15
1.3.3 Théories asymptotiques instationnaires	20
1.4 Traitement des intégrales singulières	25
1.4.1 Valeur principale d'une intégrale singulière	25
1.4.2 La partie finie au sens d'Hadamard	27
1.4.3 Approximation d'intégrales hypersingulières	29
2 Une ligne portante stationnaire	33
2.1 Une ligne portante asymptotique	35
2.1.1 Discrétisation du sillage	36
2.1.2 Gradient de circulation	39
2.1.3 Résultats et validations	40

2.2	Développement d'une nouvelle méthode de ligne portante	43
2.2.1	Équation implicite de la ligne portante	44
2.2.2	Mise en place de la résolution itérative	44
2.2.3	Le problème de l'aile en flèche	46
2.2.4	Résultats et validations	48
2.2.5	Une ligne portante classique étendue	55
2.3	Application - Calculs sur pales d'hélicoptère	56
2.3.1	Modélisation d'une pale	57
2.3.2	Confrontations des résultats	63
3	Une ligne portante instationnaire	67
3.1	Développement d'une méthode instationnaire	69
3.1.1	Vitesse induite par le domaine intérieur	70
3.1.2	Vitesse induite par le domaine extérieur O_{wi}	71
3.1.3	Vitesse induite instationnaire bi-dimensionnelle	72
3.1.4	Vitesse induite par le domaine extérieur $O \cup O_{wi}$	73
3.1.5	Répartition de circulation instationnaire	75
3.2	Implémentation de la méthode instationnaire	76
3.2.1	Implémentation de la vitesse induite par le domaine $O \cup O_{wi}$	77
3.2.2	Autour du domaine bi-dimensionnel	83
3.2.3	Implémentation implicite linéarisée	86
3.2.4	Schéma algorithmique	88
3.3	Mise en œuvre quasi-stationnaire	90
3.4	Résultats et validations	92
3.4.1	La méthode VLM	92
3.4.2	Résultats quasi-stationnaires	93
3.4.3	Résultats instationnaires	95
	Conclusion	105
	Annexes	109
	A Partie finie de la vitesse induite stationnaire	109
	B Vitesse induite par une répartition surfacique γ_y	113
	Bibliographie	117



Table des figures

1.1	Le modèle de Prandtl et une illustration rapportée par Van Dyke (1982)	7
1.2	Mise en oeuvre pratique de la ligne portante	9
1.3	Position de la nappe plane Σ	12
1.4	Analyse asymptotique de la ligne portante (Van Dyke, 1964)	14
1.5	Position du problème	17
1.6	Décomposition du domaine	22
1.7	Évaluation d'une partie finie numériquement et analytiquement	32
2.1	Notations	36
2.2	Discrétisation de la ligne portante	36
2.3	Sillage linéarisé en fer à cheval	37
2.4	Sillage en nappe tourbillonnaire	37
2.5	Schéma à une bande et $n - 1$ fers à cheval	37
2.6	Schéma à trois bandes et $n - 3$ fers à cheval	38
2.7	Interpolations linéaires de $\Gamma(y)$ sur la discrétisation	39
2.8	Vitesse w_0 induite par un sillage de circulation $\Gamma_0(y)$ par différentes méthodes	41
2.9	Incidence induite sur une aile courbe	41
2.10	Circulation sur une aile courbe d'équation $x_0(y) = 0, 2y^2$	42
2.11	Circulation sur une aile droite inclinée à 45°	42
2.12	Reconstruction de la valeur de Γ en (y_{b_i}) et évaluation du gradient	45
2.13	Régularisation en bout d'aile par interpolation trigonométrique	46
2.14	Le raccord trigonométrique d'une aile brisée	48
2.15	Principe de la méthode VLM	49
2.16	Répartitions de vitesse induite sur une aile en dérapage à 45°	50
2.17	Répartitions de vitesse induite sur une aile courbe	50
2.18	Répartitions de circulation sur une aile elliptique droite face au vent	51
2.19	Répartitions de circulation sur une aile en dérapage à 45°	51
2.20	Répartitions de circulation sur une aile courbe d'équation $x_0(y) = 0, 2y^2$	52
2.21	L'aile en flèche à 30°	53
2.22	Flèche et courbure au voisinage du raccord	53
2.23	Répartitions de circulation sur une aile en flèche à 30°	53

2.24 Répartitions de circulation sur une aile courbe d'équation $x_0(y) = y^2$	54
2.25 Vrillage d'une section de pale	57
2.26 Définitions de la corde et de la ligne 1/4 de corde de la pale	58
2.27 Pale 7a	58
2.28 Pale 7ad	58
2.29 Pale Erato	59
2.30 Définition du basculement α_q	59
2.31 Définition de l'azimut Ψ	60
2.32 Angle de flèche	61
2.33 Configuration de calcul de la pale	61
2.34 Définitions des diverses incidences	61
2.35 Évolution de la flèche en envergure sur la pale 7ad	62
2.36 Évolution de l'incidence en envergure sur la pale 7ad	62
2.37 Circulations à différents azimuts sur la pale 7ad	63
2.38 Circulations à différents azimuts sur la pale Erato	63
2.39 Circulations à différents azimuts sur la pale 7ad par l'approche classique	64
2.40 Circulations à différents azimuts sur la pale Erato par l'approche classique	64
2.41 Comparaison des approches pour $\Psi = 30^\circ$	65
2.42 Vitesse induite sur la pale Erato à l'azimut 120°	65
2.43 Répartitions de circulation sur la pale Erato à l'azimut $\Psi = 60^\circ$	66
3.1 Position du problème instationnaire	70
3.2 Description du domaine intérieur	71
3.3 Le problème instationnaire 2D linéarisé	72
3.4 Élément tourbillonnaire élémentaire $d\xi d\psi$	74
3.5 Mise en place des discrétisations	77
3.6 Treillis de filaments tourbillonnaires	78
3.7 Voisinage du point de contrôle sur lequel $\gamma_x \neq 0$	79
3.8 Description du sillage avec $\gamma_y \neq 0$, $\gamma_x = 0$ et notations	81
3.9 Discrétisation définitive du sillage instationnaire	82
3.10 Calculs unitaires des vitesses induites - cube d'influence	87
3.11 Schéma algorithmique	89
3.12 Modèle en anneaux tourbillonnaires	93
3.13 Évolution quasi-stationnaire de la circulation en $2y/b = 0,525$ sur une aile peu courbée . .	94
3.14 Évolution quasi-stationnaire de la circulation en $2y/b = 0,525$ sur une aile très courbée . .	95
3.15 Évolution de la circulation en envergure et en temps sur une aile en flèche	96
3.16 Évolution de la circulation en $2y/b = 0,01667$ sur une aile en flèche de 30°	97
3.17 Évolution de la circulation en $2y/b = 0,55$ sur une aile en flèche de 30°	98
3.18 Évolution de la circulation en $2y/b = 0,225$ sur une aile faiblement courbée	99
3.19 Évolution de la circulation en $2y/b = 0,525$ sur une aile faiblement courbée	100
3.20 Évolution de la circulation en $2y/b = 0,725$ sur une aile faiblement courbée	100
3.21 Évolution de la circulation en $2y/b = 0,225$ sur une aile fortement courbée	101
3.22 Évolution de la circulation en $2y/b = 0,525$ sur une aile fortement courbée	101
3.23 Évolution de la circulation en $2y/b = 0,725$ sur une aile fortement courbée	102
3.24 Méthodes instationnaire <i>vs.</i> quasi-stationnaire en $2y/b = 0,525$ sur une aile fortement courbée	103
A.1 Allure de la fonction $f_y(\eta)$	110
B.1 Élément tourbillonnaire de densité constante	113
B.2 Configuration locale de la ligne portante	114



Index des notations

- \int Intégrale évaluée au sens des parties finies d'Hadamard — page 17
- \int Intégrale évaluée en valeur principale de Cauchy — page 7
- \mathcal{R} Paramètre d'allongement : B/C — page 13
- a Quart corde de la plaque plane dans la théorie linéarisée du profil — page 72
- B Ordre de grandeur de l'envergure — page 13
- b Envergure — page 7
- C Ordre de grandeur de la corde — page 13
- $c(y)$ Loi de corde — page 8
- c_0 Valeur de la corde de référence — page 77
- C_{z_α} Gradient de portance de l'aile — page 13
- c_{z_α} Gradient de portance de profil — page 8
- D Dimension caractéristique du domaine intérieur — page 22
- $H_{f,a,b}^n \int_a^b \frac{f(x)dx}{(b-x)^{1+n}}$ — page 28
- I Domaine intérieur — page 22
- \mathcal{L} Ligne portante — page 16
- m Nombre d'intervalles de temps — page 77
- M_0 Point de contrôle sur la ligne portante — page 16
- O Domaine extérieur — page 22
- O_{wi} Sillage du domaine intérieur I — page 22
- p Pas de temps courant — page 77

-
- $r(y)$ loi de rayon de courbure — page 17
 R_{dpp} Rayon de pied de pale — page 57
 S Domaine délimitant l'aile — page 16
 S_i Segment de discrétisation de la ligne portante — page 35
 sgn Fonction signe — page 80
 V_∞ Vitesse de l'écoulement incident à l'infini amont — page 2
 w_0 Partie finie de la vitesse induite par la ligne portante sur elle-même — page 17
 w_c Vitesse induite complémentaire due à la flèche, la courbure et à la variation de la circulation en envergure — page 18
 w_{2D} Vitesse induite instationnaire bi-dimensionnelle — page 23
 w_{libre} Vitesse induite par les tourbillons libres de $\Sigma \cap I$ — page 70
 $w_{\text{liée}}$ Vitesse induite par les tourbillons liés de $S \cap I$ — page 70
 $w_{FaC}(S_j \rightarrow y_i)$ Vitesse induite en y_i par un tourbillon en fer à cheval fixé en S_j — page 38
 w_{ijk} Vitesse induite par le quadrangle (j, k) en y_i — page 78
 w_{in} Vitesse induite par le domaine intérieur — page 22
 w_{out} Vitesse induite par le domaine extérieur — page 22
 w_{QS} Vitesse induite par la ligne portante quasi-stationnaire sur elle-même — page 90
 w_{wi} Vitesse induite par le domaine O_{wi} — page 23
 $X(0, t)$ Notation bi-dimensionnelle de $X(y, 0, t)$ — page 72
 $X(y, 0, t)$ Position à l'instant t de l'extrémité aval du sillage issu du point y — page 72
 x_0 Équation de la ligne portante — page 16
 y_i Point de calcul sur la ligne portante — page 35
 y_{b_i} Point de discrétisation de la ligne portante — page 8
 \bar{Z} Paramètre de portance du rotor — page 62
 α Incidence géométrique — page 8
 α^* Incidence induite — page 8
 α_q Basculement du mât rotor — page 59
 α_{eff} Incidence effectivement vue par le profil (géométrique + induite) — page 8
 β Exposant de Hölder — page 25
 δ Pas de temps réduit exprimé en fractions de corde de référence — page 77
 $\delta_{i,j}$ Symbole de Kronecker — page 79
 $\partial\Sigma$ Frontière de la surface tourbillonnaire Σ — page 11
 φ Potentielle de vitesse — page 11
 Γ Circulation — page 8
 Γ_0 Circulation autour du profil — page 14
 Γ_{prof} Terme de circulation traduisant le mouvement instationnaire du profil — page 73
 $\vec{\gamma}$ Densité tourbillonnaire vectorielle — page 11

γ_x, γ_y	Composantes de la densité tourbillonnaire — page 12
Λ	Flèche — page 9
λ	Allongement géométrique : b^2/S_{alaire} — page 8
Ω	Régime de rotation du rotor — page 59
θ	Pas des pales — page 59
θ_0	Pas collectif des pales — page 59
θ_v	Vrillage géométrique de la pale — page 57
θ_{1c}, θ_{1s}	Pas cycliques des pales — page 59
Ψ	Position azimutale de la pale — page 59
ρ	Paramètre de relaxation — page 48
ρ_{air}	Masse volumique de l'air — page 8
Σ	Surface de discontinuité de la vitesse tangentielle — page 11
Σ_{2D}	Domaine délimitant le sillage bi-dimensionnel — page 83
τ_v	Taux de vrillage géométrique de la pale — page 57
Ξ_y	Position de la partition du domaine Σ_{2D} — page 83



Introduction

Travailler autour de méthodes asymptotiques au XXI^{ème} siècle n'est pas dénué d'une certaine naïveté.

Quoique. . .

D'une part, la constante miniaturisation des composants électroniques permet d'augmenter la fréquence des processeurs et donc les « FLOPS¹ » et les capacités de stockage, d'autre part les simulations numériques directes ne peuvent pas, pour l'instant, étudier convenablement un écoulement complexe. De plus la mise au point d'un système portant et propulsif nécessite souvent des études paramétriques voire une observation en temps réel de son comportement plutôt qu'une simulation fine de l'écoulement.

Il n'y a donc aucune naïveté dans l'étude des méthodes asymptotiques, car la demande pour de telles approches existe. Les dernières recherches dans ce domaine, prometteuses, méritent d'être appliquées à des problématiques industrielles. C'est notamment le cas des méthodes de lignes portantes dont la facilité de mise en œuvre est une des qualités premières.

À l'origine imaginée par Prandtl pour des ailes droites en écoulement stationnaire, cette approche a connu des développements théoriques remarquables portant sur des écoulements instationnaires autour d'ailes de formes en plan complexes. Soucieuses de simplicité, de nombreuses applications utilisent la théorie de Prandtl pour déterminer les efforts aérodynamiques ou la répartition de vitesses induites dans un sillage mince en conservant le formalisme original de Prandtl sans prendre en compte les résultats théoriques les plus récents suivant leurs besoins (instationnarité, inclinaison voire courbure des corps

¹FLOting point OPeration per Second : opération en virgule flottante (*i.e.* sur des réels) par seconde, quelques gigaflops pour les meilleurs processeurs à ce jour

portants...).

Le cadre général de la ligne portante (stationnaire ou non) fixe en partie ses conditions d'utilisation. L'un des aspects intéressants de cette théorie est sa large gamme d'applications tant aéronautiques qu'hydrodynamiques. Néanmoins, certaines hypothèses s'appliquant aux corps étudiés en restreignent la portée.

En premier lieu, le corps est supposé mince². On suppose également qu'une des deux autres dimensions³ est grande devant la troisième⁴. Ainsi, dès l'introduction de notre problème nous sommes confrontés à la question des échelles caractéristiques sous la forme du rapport de ces deux longueurs : le paramètre d'allongement. La grande valeur (devant l'unité) de ce paramètre est vitale. Historiquement d'abord car la théorie de Prandtl et ses applications directes supposent une aile de grand allongement. Théoriquement ensuite puisque les méthodes asymptotiques de la ligne portante s'appuient sur des développements asymptotiques vis-à-vis d'un petit paramètre qui n'est autre que l'inverse de l'allongement.

L'écoulement à l'infini amont est de plus supposé stationnaire et irrotationnel, à la vitesse V_∞ . On considérera que l'écoulement reste attaché sur le corps afin que le sillage qui en est issu puisse être considéré comme une surface de glissement c'est-à-dire une surface présentant une discontinuité de vitesse tangentielle. En ce qui concerne le fluide, il est considéré parfait et incompressible. Le premier point est primordial puisque ce sont les conditions de glissement sur l'aile et de Kutta-Joukowski qui conduisent à l'équation intégrale du problème portant. L'hypothèse d'incompressibilité est la plus contournable au sens où nous l'utiliserons dans tous les développements, bien que nombre de mises en œuvre pratiques (la pale avançante d'un hélicoptère est soumise en extrémité à un écoulement subsonique compressible voire transsonique), mais aussi de développements théoriques (Cheng et Meng, 1980, présentent un théorie asymptotique de la ligne portante en écoulement transsonique), violent cette hypothèse et présentent des écoulements à nombre de Mach non nul.

L'hypothèse d'incompressibilité étant posée, le problème peut alors être décrit par l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses. Celle-ci est complétée par un jeu de conditions aux limites directement issues des hypothèses citées ci-dessus. Le fluide parfait impose le respect de la condition de glissement sur l'aile. De plus, il convient en tout point du bord de fuite de vérifier la condition de Joukowski. Pour le sillage, il présente un saut de pression nul à sa traversée et il évolue au gré de l'écoulement (convection, enroulement...).

Ainsi, au fil du temps, deux axes de recherche sont apparus. Le premier, théorique, a développé les méthodes asymptotiques en vue de prendre en compte de plus en plus de paramètres dans des approches

²*i.e.* l'épaisseur est faible devant les autres dimensions

³l'envergure

⁴la corde

de ligne portante ; le second, conservant la détermination implicite de la circulation comme l'a décrite Prandtl, a consisté à introduire des évolutions plus ou moins justifiées. Rappelons qu'une formulation explicite présente l'inconnue du problème à partir d'une équation ne faisant intervenir que des termes connus et qu'une formulation implicite fait intervenir cette inconnue dans les deux membres de l'équation. Concilier théorie asymptotique avec méthode implicite, tel est le défi que se propose de relever ce travail de thèse.

Cette thèse a pour but de mettre en œuvre une méthode de calcul de ligne portante instationnaire courbe et en flèche utilisable dans des codes de calcul industriels. Le choix de la ligne portante assure une rapidité d'exécution sans commune mesure. Une contrainte forte de ce travail a été de tout mettre en œuvre pour ne pas perdre cette qualité première, notamment les traitements mathématiques et les implémentations ont connu une phase d'optimisation afin de ne pas grever le rapport précision/temps de calcul.

C'est pourquoi le développement de cette méthode a visé, avant tout, à conserver l'approche de Prandtl en introduisant de façon rigoureuse les résultats des démarches asymptotiques pour la prise en compte de l'inclinaison et de la courbure de la ligne portante. Cette méthode de calcul a adopté dans un premier temps un schéma explicite propre aux méthodes asymptotiques, puis dans un second temps un schéma implicite (à l'image de la théorie de Prandtl) qui améliore significativement les résultats.

Les résultats présentés dans ce mémoire, portent essentiellement sur des répartitions de circulation (en envergure et au cours du temps), voire de vitesse induite. La circulation est, en effet, une grandeur fondamentale qui permet, par la suite, de déterminer les vitesses induites dans le sillage, les efforts... Ceux-ci n'ont pas été évalués de manière à centrer nos validations sur la circulation à l'aide de méthodes potentielles.

L'architecture de ce document est des plus classiques avec en premier lieu une étude bibliographique qui nous permettra de présenter les approches de ligne portante en mettant l'accent sur les différences fondamentales entre l'approche implicite de Prandtl et la description asymptotique. À cette occasion, nous présenterons également les différents développements instationnaires de la ligne portante. Un large opus sera consacré à un traitement mathématique très utile dans les problèmes de mise en influence présentant des équations intégrales.

Ensuite, nous présenterons le développement de notre approche implicite de la ligne portante en écoulement stationnaire pour des ailes de formes en plan complexes notamment courbes et en flèche. Elle sera suivie par une application qui consiste à étudier une aile dans une configuration de pale courbe en rotation.

Enfin, nous exposerons le développement d'une méthode implicite de calcul de marche en temps pour la ligne portante instationnaire, pour des ailes courbes et en flèche, issue des théories asymptotiques. Dans cette section, l'efficacité des approches quasi-stationnaires (dont nous proposons une implémentation issue du chapitre précédent) sera évaluée. La méthode instationnaire fera alors l'objet d'une implémentation que nous validerons sur des ailes en flèche et courbe.

Bibliographie critique

Sommaire

1.1	La ligne portante stationnaire de Prandtl	6
1.1.1	Une théorie heuristique	6
1.1.2	Les mises en œuvre de la théorie de Prandtl	8
1.2	La nature du sillage en fluide parfait instationnaire	11
1.3	Formulation asymptotique de la ligne portante	13
1.3.1	Théorie asymptotique stationnaire pour une aile droite	13
1.3.2	Théorie asymptotique stationnaire pour des ailes courbes et en flèche	15
1.3.3	Théories asymptotiques instationnaires	20
1.4	Traitement des intégrales singulières	25
1.4.1	Valeur principale d'une intégrale singulière	25
1.4.2	La partie finie au sens d'Hadamard	27
1.4.3	Approximation d'intégrales hypersingulières	29

1.1 La ligne portante stationnaire de Prandtl

Lorsque dans les années 1910, le *National Advisory Committee for Aeronautics* commande à Prandtl un rapport des applications de l'hydrodynamique à l'aéronautique en vue du calcul des efforts sur les corps portants et non portants, celui-ci propose un volumineux document en deux parties (Prandtl, 1923).

La première rappelle les notions fondamentales de l'hydrodynamique, la seconde est un recueil d'applications (répartitions de pressions sur des corps fuselés, théorie du profil...), dont une particulièrement intéressante considère une aile d'envergure finie.

1.1.1 Une théorie heuristique⁵

Nous allons présenter ici la démarche de ligne portante en écoulement stationnaire initialement proposée par Prandtl (1923). Ce document fait suite aux nombreux écrits de l'auteur à l'Université de Göttingen et permet de jeter les bases d'une méthode (plus que d'une théorie) d'études des écoulements autour d'ailes d'envergure finie.

Le problème posé par Prandtl est de quantifier, dans le cadre du problème tri-dimensionnel, l'effet de l'allongement sur les performances d'une aile placée perpendiculairement au vent incident. En effet, la portance locale décroît lorsque l'on s'approche des extrémités et tend vers 0 aux saumons de la voilure car le fluide est libre de contourner l'aile et ainsi, à incidence donnée, la portance globale d'une aile décroît avec l'allongement.

S'appuyant sur une démarche heuristique, Prandtl propose une modélisation simple de l'aile d'envergure finie, placée perpendiculairement à un vent incident uniforme ($V_\infty \cdot \vec{x}$). Un tourbillon lié, disposé le long de l'aile figure celle-ci et deux tourbillons libres semi infinis, s'étendant entre les extrémités de l'aile et l'infini aval, représentent les contournements d'extrémités de voilure (Fig. 1.1). Ainsi, l'aile et le sillage mince sont modélisés par un tourbillon fermé à l'infini qui vérifie le théorème d'Helmoltz.

Plusieurs arguments permettent à Prandtl de justifier ce modèle. Le premier est la présence de tourbillons marginaux sur les extrémités d'une aile d'envergure finie dus à la création d'un écoulement transversal entre la surpression d'intrados et la dépression d'extrados. Ensuite, la présence du tourbillon lié assure la présence d'une portance sur l'aile. Enfin, en application de la relation de Biot et Savart, ce système est associé à une vitesse induite perpendiculaire au plan de l'aile. Calculée en un point situé entre les tourbillons, cette vitesse est de direction opposée à la portance et provoque par composition avec la vitesse du vent incident, une diminution de l'incidence effective de l'écoulement et une diminution de portance modélisant ainsi le problème initial posé par Prandtl.

⁵qui procède par hypothèses provisoires, approches, trouvailles successives dans la résolution d'un problème In *Dictionnaire de l'Académie française, neuvième édition*.

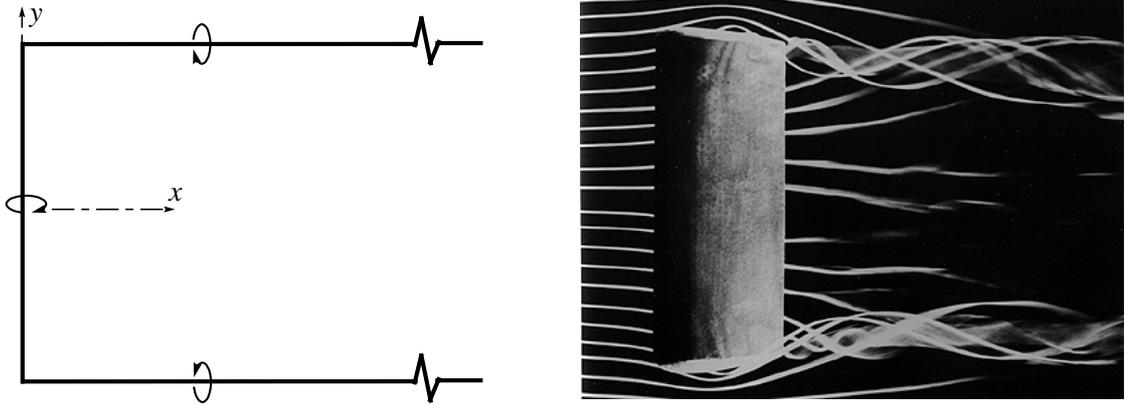


FIG. 1.1 – Le modèle de Prandtl et une illustration rapportée par Van Dyke (1982)

Ce modèle qui considère une valeur de la circulation constante en envergure étant trop rustique, Prandtl s'appuie sur la variation en envergure de la portance locale pour affiner la représentation de la circulation. En considérant que la circulation, que nous noterons Γ , n'est pas constante en envergure, il convient alors de mettre en place une série de tourbillons en fer à cheval de largeur $\Delta\eta$ et de circulation $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\eta}\Delta\eta$. Dans le cas où l'on néglige la déformation du sillage (*i.e.* le système de filaments tourbillonnaires reste plan et convecté par le vent infini amont) et où on se limite à de faibles incidences pour lesquelles la théorie linéarisée s'applique, la vitesse induite par ce système tourbillonnaire s'exprime par le biais de la relation de Biot et Savart.

Bien qu'introduite de manière non rigoureuse, cette modélisation de l'aile et de son sillage par une suite de filaments tourbillonnaires est validée par Prandtl de façon intuitive. En effet, le contournement en extrémité de voilure impose, à partir du bord de fuite et sur tout le sillage mince, une discontinuité tangentielle de vitesse. Poincaré a démontré qu'une telle surface était équivalente, en terme de vitesse induite, à une nappe tourbillonnaire⁶; ceci justifie le passage à une description continue de l'aile et de son sillage. Ainsi, chaque élément $d\eta$ induit une vitesse verticale dw en y :

$$dw(y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta}$$

soit, une vitesse à prendre en valeur principale au sens de Cauchy⁷ :

$$w(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} \quad (1.1)$$

Cette vitesse induite peut être interprétée en terme d'incidence induite. En linéarisant l'expression de cet angle qui, par hypothèse, reste faible, on obtient l'incidence induite suivante :

$$\alpha^*(y) = -\frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta}$$

⁶nous décrivons plus précisément la nature du sillage en fluide parfait à la section 1.2

⁷nous reviendrons sur cette notion au §1.4.1, page 25

Ainsi, l'incidence de chaque section d'aile est modifiée via un effet d'incidence induite par le sillage tri-dimensionnel.

De plus, en s'appuyant sur la théorie linéarisée du profil, on peut écrire en terme de portance locale :

$$\rho_{\text{air}} V_{\infty} \Gamma = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} c V_{\infty}^2 c_{z_{\alpha}} \alpha_{\text{eff}}$$

où Γ est la circulation autour du profil, $c_{z_{\alpha}}$ le gradient de portance du profil⁸ et α_{eff} est l'incidence effectivement vue par le profil *i.e.* la somme algébrique de l'incidence géométrique et de l'incidence induite.

S'agissant d'un profil de type plaque plane, il vient l'équation régissant la répartition de circulation d'une aile d'envergure finie :

$$\Gamma(y) = \pi c(y) V_{\infty} [\alpha(y) + \alpha^*(y)] \quad (1.2)$$

$$\Gamma(y) = \pi c(y) V_{\infty} \left[\alpha(y) - \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} \right] \quad (1.3)$$

L'expression (1.3) constitue l'équation intégral-différentielle de Prandtl. Il est également possible de retrouver cette expression à partir de la théorie linéarisée de la surface portante en écoulement stationnaire moyennant les hypothèses déjà citées. On trouve notamment cette démarche explicitée par Prandtl lui-même (Prandtl, 1920, pp. 6-8) où le nombre de filaments en fer à cheval en corde est fixé à 1 et la vitesse induite w est exprimée grâce à la condition de Joukowski.

1.1.2 Les mises en œuvre de la théorie de Prandtl

Rappelons tout d'abord, que la théorie de Prandtl admet une solution analytique par la méthode de Glauert-Carafoli. A l'aide du changement de variable $y(\theta) = (b/2) \cos \theta$, il est possible d'écrire l'équation (1.3) en utilisant le développement en série de Fourier de la circulation. Pour une aile à loi de corde elliptique en incidence uniforme et placée perpendiculairement au vent, la répartition de la circulation est elliptique et vaut :

$$\Gamma(y) = \frac{2bV_{\infty}\alpha}{1 + \lambda/2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2} \quad (1.4)$$

où λ est l'allongement géométrique b^2/S .

Hormis cette unique solution analytique, les outils numériques utilisant la ligne portante de Prandtl s'appuient sur une approximation simple de la répartition de circulation. La ligne est décrite par N segments. La circulation est approchée par une fonction en escalier, constante sur chaque portion de ligne portante *i.e.*

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall y \in [y_{b_i}, y_{b_{i+1}}], \Gamma(y) = \Gamma_i$$

⁸*i.e.* le coefficient de proportionnalité (tant que l'écoulement est attaché) entre la portance et l'incidence vue par le profil

Par conséquent l'aile et son sillage plan sont représentés par un système de tourbillons en fer à cheval semi infinis (Fig. 1.2). Ceci constituera dans la suite ce que nous appellerons *implémentation de la ligne portante classique*.

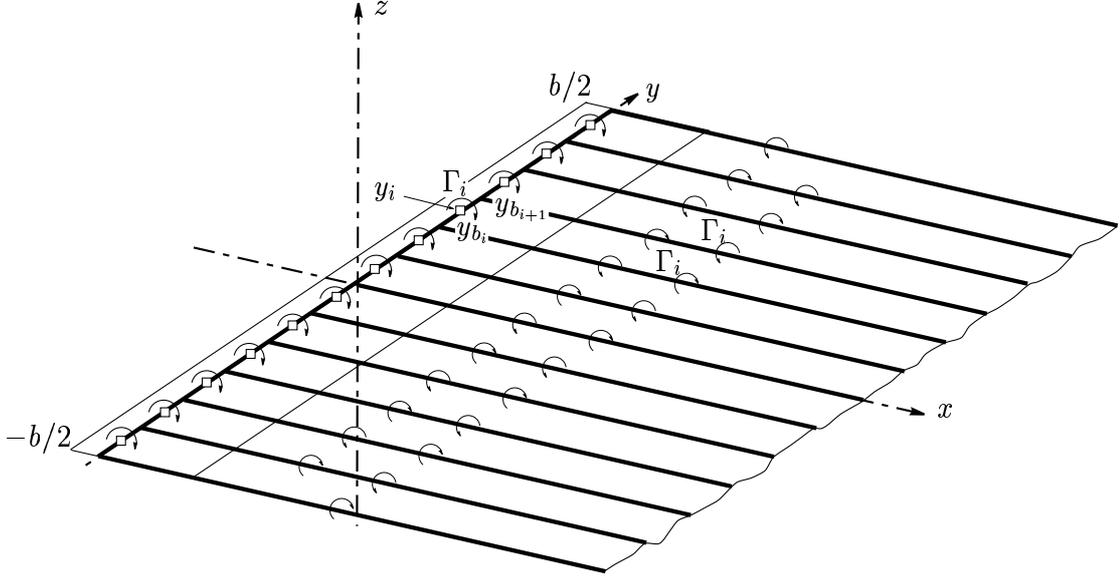


FIG. 1.2 – Mise en oeuvre pratique de la ligne portante

Le calcul de la vitesse induite obtenue en discrétisant (1.1) est effectué à l'aide de la relation de Biot et Savart et conduit pour l'équation intégréo-différentielle (1.3) à un système linéaire de N équations à N inconnues résolu soit directement, soit itérativement (le système étant à diagonale dominante).

Les utilisateurs des outils mettant en œuvre cette démarche ont étendu arbitrairement le domaine de validité de la théorie de Prandtl. Dans la cas des ailes inclinées par rapport au vent (voire courbes), le système tourbillonnaire est également incliné puisque chaque segment discrétisant la ligne portante constitue le tourbillon de tête. De plus, il est d'usage de considérer la composante du vent incident normale à la ligne portante (voir notamment Hoerner, 1975). En effet, si l'on considère une aile d'envergure infinie en dérapage, il est analogue de considérer cette même aile positionnée perpendiculairement au vent incident et animée d'un mouvement de glissement perpendiculaire au vent (Hoerner, 1975). Ainsi, si $\Lambda(y)$ est la loi de flèche de la ligne portante, l'équation (1.2) est modifiée selon :

$$\Gamma(y) = \pi c(y) V_\infty \cos \Lambda(y) [\alpha(y) + \alpha^*(y)] \quad (1.5)$$

Les domaines de l'aérodynamique mettant en œuvre des ailes de grand allongement sont les principaux utilisateurs de l'approche ligne portante. On trouve assez souvent des applications de cette théorie à des écoulements compressibles, rotationnels ou instationnaires autour d'ailes en flèche voire courbes.

Ceci est particulièrement vrai dans le domaine des voilures tournantes où, en plus d'un grand allongement (de 10 à 15), on rencontre les effets de la compressibilité, les phénomènes de décrochage statique et dynamique...

De nombreux travaux d'optimisation des rotors d'hélicoptères ont ainsi vu le jour à l'ONERA, en collaboration avec le laboratoire, sur la base de la ligne portante. Les travaux de Bousman *et al.* (1989), Michea (1992) et Costes *et al.* (1998) ont permis le développement de méthodes alliant ligne portante, mise en équilibre du sillage mince issu de l'aile, et la prise en compte des effets de fluide réel (décrochage) et de compressibilité à l'aide de polaires expérimentales de profils. C'est pourquoi notre objectif est d'établir une méthode de ligne portante avec prise en compte rigoureuse des effets d'inclinaison et de courbure (dans le plan de l'aile) de la ligne portante.

1.2 La nature du sillage en fluide parfait instationnaire

La description du sillage issu de la ligne portante revêt une grande importance et il convient avant tout autre développement d'en préciser la nature dans le cadre général des écoulements instationnaires. Les travaux de Mudry (1982) présentent une théorie générale des nappes tourbillonnaires en aérodynamique instationnaire dont nous allons rappeler les principes.

En fluide réel, le sillage émis par un obstacle est la confluence en aval du bord de fuite des couches limites qui s'établissent sur l'intrados et l'extrados. En écoulement de fluide parfait incompressible, l'épaisseur des couches limites tend vers 0 et le sillage tend vers une surface mince de glissement (Σ) siège d'une discontinuité de la vitesse tangentielle, c'est-à-dire, en notant \vec{n} la normale locale à (Σ) :

$$[\vec{U}] \cdot \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Sigma$$

En écoulement irrotationnel, la vitesse \vec{U} dérive d'un potentiel de vitesse φ :

$$\vec{U}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$$

Ainsi, cette surface peut être représentée par une répartition surfacique de doublets à axes normaux d'intensité $[\varphi]$. Hess (1969) a montré l'équivalence, en terme de vitesse induite, entre cette représentation et une répartition surfacique de tourbillons⁹ sur (Σ) d'intensité :

$$\vec{\gamma} = \vec{n} \wedge [\vec{U}] = \vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}[\varphi] \quad (1.6)$$

associée à une répartition linéique de tourbillons $[\varphi]d\vec{l}$ sur la frontière $\partial\Sigma$.

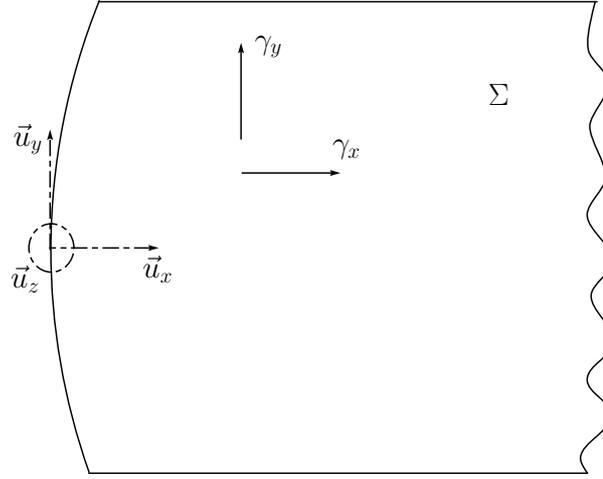
Dans ce cas, le champ de vitesse induite en un point M de l'espace par une telle nappe est donné par la relation de Biot et Savart généralisée :

$$\vec{U}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \frac{\vec{\gamma} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} dS_P + \frac{1}{4\pi} \int_{P \in \partial\Sigma} \frac{[\varphi]d\vec{l}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (1.7)$$

Mudry (1982) montre, dans le cas des sillages, que cette répartition linéique est nulle sur les bords libres de la nappe. C'est pourquoi le sillage peut être décrit par une nappe tourbillonnaire d'intensité $\vec{\gamma}$ avec une répartition linéique de tourbillons le long du bord de fuite (voir, par exemple, Devinant *et al.*, 1999).

Dans la suite, nous ne considérerons pas le cas général des nappes de formes quelconques dont le formalisme complexe est exposé par Mudry (1982) ; nous nous intéresserons, dans le cadre d'une approche linéarisée, aux nappes tourbillonnaires planes. Dans ce cadre, comme le montre la figure 1.3, tout point de (Σ) est tel que $\vec{n} = \vec{u}_z$.

⁹*i.e.* une nappe tourbillonnaire dont la première description est due à Poincaré

FIG. 1.3 – Position de la nappe plane Σ

Ainsi, l'équation (1.6) devient :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} &= \vec{u}_z \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x}[\varphi]\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}[\varphi]\vec{u}_y \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}[\varphi]\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial x}[\varphi]\vec{u}_y\end{aligned}\quad (1.8)$$

On peut donc décomposer la répartition tourbillonnaire surfacique $\vec{\gamma}$ en deux composantes (γ_x, γ_y) :

- la composante responsable d'une discontinuité de vitesse selon \vec{u}_x à la traversée de Σ dont l'intensité vaut :

$$\gamma_x = -\frac{\partial[\varphi]}{\partial y}$$

- la composante responsable d'une discontinuité de vitesse selon \vec{u}_y à la traversée de Σ dont l'intensité vaut :

$$\gamma_y = \frac{\partial[\varphi]}{\partial x}$$

Or, comme l'énonce Mudry (1982), sur une nappe tourbillonnaire, au sein d'un écoulement irrotationnel, le saut de potentiel des vitesses est égal au potentiel de discontinuité *i.e.* à la circulation. Par conséquent, la densité surfacique γ_x peut être reliée à la variation en envergure de la répartition de circulation sur la nappe. De même, γ_y peut être reliée à la variation dans le sens de l'écoulement de la répartition de circulation. Le sillage étant convecté à la vitesse uniforme V_∞ (approche linéarisée), γ_y traduit donc la variation au cours du temps de la circulation en un point donné de la nappe.

Dans le cas stationnaire qui nous occupera également, il vient :

$$\frac{\partial[\varphi]}{\partial x} = 0$$

et donc, la densité tourbillonnaire est uniquement imposée par la variation en envergure de la circulation.

1.3 Formulation asymptotique de la ligne portante

Comme nous l'avons vu, pour une aile mince, la théorie de Prandtl consiste à étudier un problème bi-dimensionnel pour lequel l'effet d'envergure finie se traduit par un effet de vitesse induite par le sillage et conduit à la résolution d'une équation intégral-différentielle implicite en chaque point de l'envergure. Un paramètre géométrique fondamental, dont Prandtl a senti le rôle, conditionne la répartition de circulation (1.4) et donc la portance : l'allongement.

1.3.1 Théorie asymptotique stationnaire pour une aile droite

On doit principalement les premiers développements asymptotiques de la ligne portante à Van Dyke (1964) qui a isolé la nature du problème et proposé un procédé pour le résoudre. Le problème portant d'une aile mince en écoulement de fluide parfait incompressible fait apparaître deux dimensions caractéristiques : l'envergure et la corde. Ces deux dimensions ont des ordres de grandeur différents : l'ordre de grandeur de l'envergure est B et celui de la corde est C . On peut alors définir un paramètre d'allongement $\mathcal{R} = B/C$ qui demeure voisin de l'allongement géométrique λ , voire égal si l'on choisit $C = c^{10}$ et $B = b^{11}$.

La nature perturbatoire du problème posé par Prandtl est visible dans l'écriture de l'équation (1.2) et dans tous les résultats qui en découlent, notamment dans l'écriture du gradient de portance C_{z_α} de l'aile (Van Dyke, 1964). Dans le cas classique de l'aile elliptique, la méthode de Glauert-Caraffoli donne :

$$C_{z_\alpha} = \frac{c_{z_\alpha}}{1 + \frac{c_{z_\alpha}}{\pi\lambda}}$$

où c_{z_α} est le gradient de portance du profil constitutif de l'aile.

Lorsque l'allongement devient suffisamment grand, on peut écrire :

$$C_{z_\alpha} = c_{z_\alpha} \left(1 - \frac{c_{z_\alpha}}{\pi\lambda} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

ce qui illustre la nature perturbatoire du problème au sens où la donnée du gradient de portance bi-dimensionnel est corrigée par une perturbation tri-dimensionnelle. De plus, cette perturbation est un petit paramètre (ϵ) vis-à-vis du phénomène qu'elle perturbe *i.e.* $\epsilon = \mathcal{R}^{-1} = C/B = o(1)$ ce qui permet d'envisager une linéarisation des équations.

Par ailleurs, Van Dyke montre que les problèmes de perturbation dont le petit paramètre est le rapport de deux longueurs sont nécessairement singuliers et que ceux-ci voient cette singularité levée à l'aide d'une démarche asymptotique. Le principe général de celle-ci est de faire tendre le petit paramètre

¹⁰la corde moyenne

¹¹l'envergure

ϵ vers 0 asymptotiquement. Pour cela, dans le cas de la ligne portante, il n'y a qu'une alternative : faire tendre la dimension caractéristique de l'envergure vers l'infini ou bien faire tendre la dimension caractéristique de la corde vers 0.

Lorsque $B \rightarrow \infty$, le problème tend asymptotiquement vers une configuration bi-dimensionnelle : c'est le problème intérieur (Fig. 1.4). Il convient alors de déterminer la circulation autour d'un profil de corde $c(y)$, à une incidence α , que l'on suppose de faible épaisseur de manière à utiliser la théorie linéarisée du profil. La solution constitue une approximation à l'ordre 0 de la circulation et vaut pour une vitesse unitaire :

$$\Gamma(y) = \Gamma_0(y) = \pi c(y)\alpha \quad (1.9)$$

On satisfait alors la condition de glissement et la condition de Kutta Joukowski.

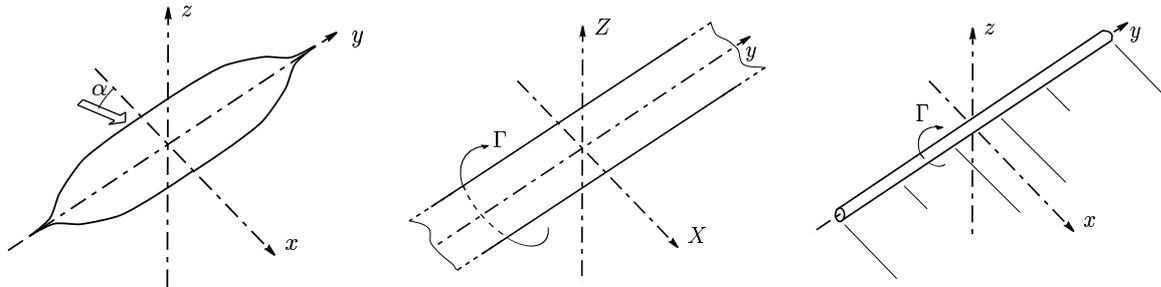


FIG. 1.4 – Analyse asymptotique de la ligne portante (Van Dyke, 1964)

La deuxième étape est de faire tendre C vers 0. Ceci constitue une approximation distale du problème ; pour les points éloignés de l'aile, celle-ci se réduit à une ligne portante. L'aile s'apparente donc à un segment tourbillonnaire lié : on parle de problème extérieur.

Il convient de raccorder ces deux représentations asymptotiques. Par propriété, le raccordement conduit à la détermination d'une intégrale singulière explicite à prendre en valeur principale au sens de Cauchy, alors que la démarche de Prandtl conduit à une formulation intégrale implicite. Le raccordement est effectué en proposant que la répartition tourbillonnaire linéique sur le segment lié obéisse à la loi de circulation (1.9) déterminée pour le domaine intérieur.

La variation continue de la circulation sur le segment impose, pour satisfaire au théorème d'Helmoltz, la présence d'une nappe tourbillonnaire semi infinie s'étendant en aval de la ligne tourbillonnaire et parallèle au vent incident. La circulation locale sur la ligne portante vaut, à l'ordonnée y , $\Gamma_0(y)$.

La vitesse induite par ce système est calculée grâce à la relation de Biot et Savart sous sa forme intégrale moyennant une précaution : la vitesse induite est calculée en des points appartenant à la nappe

tourbillonnaire, elle est donc prise en valeur principale au sens de Cauchy :

$$w(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{Ligne} \frac{\dot{\Gamma}_0(\eta)}{y - \eta} d\eta \quad (1.10)$$

On peut alors écrire la répartition de circulation sous une forme très classique :

$$\Gamma(y) = \pi c(y) \alpha_{eff}(y) \quad (1.11)$$

où $\alpha_{eff}(y)$ est l'incidence effective, somme algébrique de l'incidence géométrique et de l'incidence induite par le problème extérieur :

$$\alpha_{eff}(y) = \alpha \left(1 - \frac{1}{4} \int_{Ligne} \frac{\dot{c}(\eta)}{y - \eta} d\eta \right) \quad (1.12)$$

où la variable pointée signifie la dérivation par rapport à l'unique variable (η). L'équation (1.11) peut s'écrire sous la forme d'une équation explicite en Γ_0 , sous la forme :

$$\Gamma(y) = \pi c(y) \left[\alpha - \frac{1}{4\pi} \int_{Ligne} \frac{d\Gamma_0(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} \right] \quad (1.13)$$

où $\Gamma_0(y) = \pi c(y) \alpha$.

Comparée à l'équation (1.3), l'équation (1.13) a une forme très similaire, si ce n'est que le calcul de la circulation est désormais explicite. En réalité, ce sont les deux mêmes équations avec une hypothèse supplémentaire pour la seconde : le terme d'incidence induite est petit devant l'incidence géométrique (Coirier, 1999). La difficulté, commune avec la théorie de Prandtl, est l'évaluation d'une intégrale singulière.

Cette analyse asymptotique de la ligne portante constitue le point de départ de la quasi totalité des travaux actuels concernant la ligne portante.

1.3.2 Théorie asymptotique stationnaire pour des ailes courbes et en flèche

Van Dyke prédit lui-même que son approche peut être étendue. En effet, alors que la représentation implicite est un frein aux développements des méthodes de lignes portantes, la démarche asymptotique permet des développements théoriques de la ligne portante.

Ainsi, on peut noter une première tentative d'extension de la théorie asymptotique par Ashley et Landhal (1965). Le domaine extérieur est décrit par la théorie des sillages minces. Cette théorie permet une approche plus fine de la théorie de la ligne portante et introduit des termes supplémentaires dans la vitesse induite. Ces auteurs montrent qu'il est possible d'obtenir, pour une aile sans dérapage, une équation intégrale implicite en Γ similaire à celle qui régit la théorie de Weissinger (1947) ; on retrouve parfois cette opération sous le nom de *Théorème de Pistolesi*. Les auteurs ne proposent pas d'extensions aux ailes en dérapage et évoquent seulement les travaux de Weissinger pour ce type d'aile.

La première théorie asymptotique pour les ailes courbes en écoulement stationnaire est l'œuvre de Thurber (1965). On voit en effet dans ce travail l'utilisation des méthodes asymptotiques pour une aile courbe. Thurber utilise un développement asymptotique de la circulation faisant apparaître un terme en $\ln(\mathcal{R}^{-1})$ sous la forme particulière : $(\mathcal{R}^{-1}) \ln(\mathcal{R}^{-1})$. Ainsi, Thurber a isolé une singularité jusqu'alors passée inaperçue. Le logarithme du paramètre d'allongement intervient dans le deuxième terme du développement asymptotique de la circulation, alors qu'il n'apparaît que dans le troisième dans le cas de l'aile droite. Malheureusement, sa méthode s'avère peu ou pas exploitable dans le cadre d'applications pratiques. Par la suite, Cheng (1978) est parvenu à appliquer la démarche asymptotique à une aile en dérapage en reformulant les travaux de Thurber.

Les travaux de Guermond et Sellier (1991, 1990) constituent l'une des dernières avancées dans le domaine de la ligne portante. Ces travaux représentent une synthèse théorique complète de la ligne portante pour des ailes planes courbes et en flèche. Guermond résout directement la formulation intégrale équivalente à la formulation aux dérivées partielles grâce à la technique des développements asymptotiques raccordés. Il fait apparaître une solution asymptotique en utilisant les intégrales en partie finie au sens d'Hadamard et le développement asymptotique de telles intégrales.

Théorie asymptotique stationnaire de Guermond

Comme pour toutes les théories de ligne portante, les hypothèses sont toujours les mêmes : il s'agit d'étudier une aile de faible épaisseur dans un écoulement irrotationnel de fluide parfait homogène incompressible. Les incidences et cambrures de profil sont faibles, il est donc possible de linéariser le problème. Un repère direct (O, X, Y, Z) est attaché à l'aile (S) et au sillage (Σ), issu du bord de fuite, qui demeurent dans le plan horizontal (O, X, Y) . L'aile (S) est caractérisée par deux dimensions B et C relatives à l'envergure et à la corde telles que le paramètre d'allongement $\mathcal{R} = B/C$ soit grand devant l'unité. La vitesse du vent incident (parallèle à (O, X)) est unitaire et il est procédé à l'adimensionnement des différentes grandeurs ainsi : $x = \frac{X}{C}$, $y = \frac{Y}{B/2}$, $c(y) = \frac{C(Y)}{C}$ et $V_\infty = 1$.

On décrit alors (Fig. 1.5) la ligne portante (\mathcal{L}) comme étant le lieu des points $M_0(y, x_0(y))$, $y \in [-b/2, b/2]$ situés en un point quelconque de la corde. Le choix de la position en corde n'a pas d'influence particulière sur les résultats. En effet, il est possible de formuler la théorie générale en n'importe quel point en corde. Cependant, de nombreux auteurs choisissent le quart corde pour des raisons aussi bien aérodynamiques¹² que pour simplifier l'écriture de la répartition de circulation. C'est d'ailleurs ce choix que nous faisons pour les développements formels qui suivent.

La fonction x_0 se doit d'être de classe \mathcal{C}^2 sur $[-b/2, b/2]$ afin de prévenir toute modification brusque

¹²c'est la position du foyer du profil

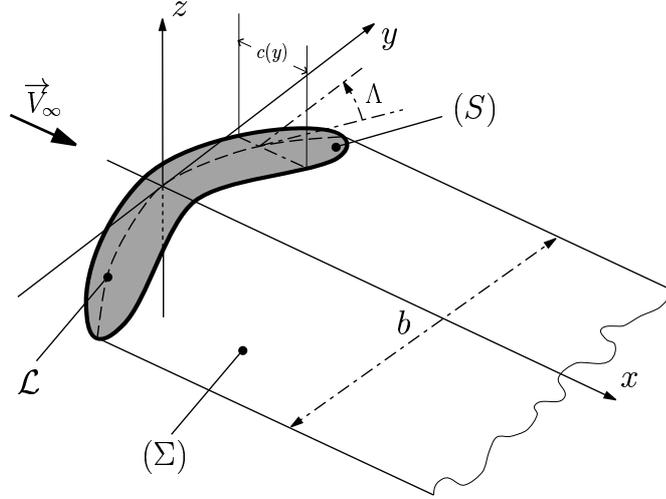


FIG. 1.5 – Position du problème

de la géométrie, de la flèche – $\Lambda(y)$ – et du rayon de courbure – $r(y)$. De plus, ces fonctions doivent être de l'ordre de l'unité pour assurer la validité des calculs. On considère également des lois d'incidence et de corde continues.

Les équations gouvernant le problème sont l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses, la condition de glissement sur l'aile, la condition de Joukowski au bord de fuite de celle-ci et un saut de pression nul au travers du sillage. A l'aide d'une fonction de Green, Guermond propose une formulation intégrale de la vitesse induite à considérer en partie finie au sens d'Hadamard. Celle-ci est ensuite développée asymptotiquement vis-à-vis du petit paramètre \mathcal{R}^{-1} . Ceci conduit à écrire la répartition de circulation comme suit :

$$\Gamma(y) = \Gamma_0(y) + \mathcal{R}^{-1} \ln(\mathcal{R}^{-1}) \Gamma_1(y) + \mathcal{R}^{-1} \Gamma_2(y) + o(\mathcal{R}^{-1}) \quad (1.14)$$

$$\text{avec } \Gamma_0(y) = \pi c(y) \cos \Lambda(y) \alpha(y) \quad (1.15a)$$

$$\Gamma_1(y) = \pi c(y) \cos \Lambda(y) \left(\frac{\Gamma_0(y)}{4\pi r(y)} + \sin \Lambda(y) \frac{\dot{\Gamma}_0(y)}{2\pi} \right) \quad (1.15b)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(y) = & \pi c(y) \cos \Lambda(y) \left(w_0(M_0) + \left[\frac{\Gamma_0(y)}{4\pi r(y)} + \sin \Lambda(y) \frac{\dot{\Gamma}_0(y)}{2\pi} \right] \left[\ln \left(\frac{c(y)}{4} \right) + \frac{1}{2} \right] \right. \\ & + \frac{\Gamma_0(y)}{4\pi r(y)} \left[1 - \tan^2 \Lambda(y) - \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda(y)} \right) \right] \\ & \left. + \frac{\dot{\Gamma}_0(y)}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin \Lambda(y)}{\cos \Lambda(y)} \right| - \sin \Lambda(y) \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda(y)} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (1.15c)$$

$$\text{et } w_0(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma_0(\psi)}{(y - \psi)^2} \left[1 + \frac{x_0(y) - x_0(\psi)}{\sqrt{(x_0(y) - x_0(\psi))^2 + (y - \psi)^2}} \right] d\psi \quad (1.15d)$$

Ce qui, à l'aide de l'équation (1.14) peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma(y) = \pi c(y) \cos \Lambda(y) (\alpha(y) + \alpha^*(y)) \quad (1.16)$$

Si l'on considère une approche linéarisée, alors $\alpha^* \approx w/V_\infty = w$ (car la vitesse de l'écoulement amont est supposée unitaire) et le terme de vitesse induite prend la forme :

$$\alpha^*(y) \approx w(y) = \frac{1}{\mathcal{R}} [w_0(M_0) + w_c(y)]$$

où w_0 est la vitesse induite par la ligne portante, et son sillage, sur elle-même définie par l'équation (1.15d) et w_c une vitesse complémentaire qui prend explicitement en compte la variation en envergure de la circulation et la géométrie complexe (flèche et courbure) de la ligne portante :

$$\begin{aligned} w_c(y) = & \left[\frac{\Gamma_0(y)}{4\pi r(y)} + \sin \Lambda(y) \frac{\dot{\Gamma}_0(y)}{2\pi} \right] \left[\ln \left(\frac{c(y)}{4\mathcal{R}} \right) + \frac{1}{2} \right] \\ & + \frac{\Gamma_0(y)}{4\pi r(y)} \left[1 - \tan^2 \Lambda(y) - \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda(y)} \right) \right] \\ & + \frac{\dot{\Gamma}_0(y)}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin \Lambda(y)}{\cos \Lambda(y)} \right| - \sin \Lambda(y) \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda(y)} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Cette écriture appelle quelques commentaires. En premier lieu, cette théorie constitue une généralisation des travaux de Van Dyke (1964). Pour une aile droite placée perpendiculairement au vent incident, le terme complémentaire w_c est nul et l'intégrale en partie finie (1.15) dégénère en une intégrale en valeur principale similaire à (1.10). Alors l'équation (1.16) s'écrit plus simplement et donne une répartition de circulation régie par (1.13).

Par ailleurs, lorsque l'on considère un problème bi-dimensionnel incliné d'un angle Λ , la courbure est nulle et la fonction Γ_0 est constante. L'équation (1.16) demeure valable et peut être comparée avec l'équation (1.5). Ceci confirme que la correction introduite dans les applications usuelles de la ligne portante pour la prise en compte de la flèche est bien de nature bi-dimensionnelle et néglige les effets de variation de la circulation et de courbure.

Dès lors, l'écriture proposée par Guermond permet d'expliquer en quoi les extensions de la théorie de Prandtl échouent à prévoir correctement le champ de vitesse induite sur une aile non droite. En effet, la théorie originale ne prend pas en compte le terme complémentaire w_c et n'introduit pas la notion d'intégrale en partie finie. Il manque donc des termes fondamentaux pour déterminer la solution du problème.

Même si les équations (1.16) et (1.2) sont formellement identiques pour une aile droite, ces deux équations sont fondamentalement différentes. La théorie asymptotique propose une équation explicite dont la résolution est simple puisque l'on obtient chaque ordre du développement asymptotique de la

circulation à partir des ordres précédents, alors que l'équation intégral-différentielle de Prandtl est une expression implicite. Par conséquent, même dans un cadre théorique où les deux modèles sont fondés, il est évident que les deux théories ne peuvent fournir le même résultat et que la circulation obtenue ne signifie pas la même chose dans ces deux approches. Cependant, la théorie de Prandtl dispose d'arguments face à la théorie asymptotique. Nous verrons dans la suite que des démarches issues de cette dernière permettent d'obtenir des résultats « meilleurs »¹³ que les théories asymptotiques.

Vitesse induite par le sillage sur la ligne : $w_0(M_0)$

Guermond obtient l'expression de w_0 à l'aide du développement asymptotique d'une intégrale en partie finie dépendant du petit paramètre \mathcal{R}^{-1} . On peut retrouver ce résultat en considérant classiquement la surface de glissement (Σ) comme une surface de discontinuité tangentielle de vitesse. Le champ de vitesse induite en un point M de l'espace par une telle surface est celui induit par une répartition surfacique de doublets à axes normaux d'intensité $\mu = [\varphi]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbb{R}^3, \vec{U}(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\mu(P) \frac{\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM}}{\|PM\|^3} \right) dS_P \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \mu(P) \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM}}{\|PM\|^3} \right) dS_P \end{aligned} \quad (1.18)$$

Or¹⁴ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM}}{\|PM\|^3} \right) &= \frac{1}{\|PM\|^3} \overrightarrow{\text{grad}}_M (\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM}) + (\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM}) \overrightarrow{\text{grad}}_M \frac{1}{\|PM\|^3} \\ &= \frac{1}{\|PM\|^3} \left(\underline{\text{grad}}_M^t (\vec{n}_p) \cdot \overrightarrow{PM} + \underline{\text{grad}}_M^t \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_p \right) + \vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM} \overrightarrow{\text{grad}}_M \frac{1}{\|PM\|^3} \\ &= \frac{1}{\|PM\|^3} \left(\underline{\mathbf{0}} \cdot \overrightarrow{PM} + \underline{\mathbf{1}} \cdot \vec{n}_p \right) - 3\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|PM\|^5} \\ &= \frac{1}{\|PM\|^3} \vec{n}_p - 3\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|PM\|^5} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Les équations (1.18) et (1.19) permettent alors d'écrire la vitesse induite par un tel système de manière plus pratique :

$$\vec{U}(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \mu(P) \left(\frac{\vec{n}_p}{\|PM\|^3} - \frac{3}{\|PM\|^5} (\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM}) \overrightarrow{PM} \right) dS_P$$

Dans la suite nous ne considérerons que le cas stationnaire où seul intervient une variation en envergure du saut de potentiel. Ainsi, en faisant apparaître la circulation :

$$\vec{U}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \Gamma(P) \left(\frac{\vec{n}_p}{\|PM\|^3} - \frac{3}{\|PM\|^5} (\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM}) \overrightarrow{PM} \right) dS_P$$

¹³au sens où les résultats sont plus proches de ceux obtenus au moyen de méthodes potentielles de type surface portante

¹⁴les (rares) opérateurs tensoriels sont notés en **gras souligné** dans ce qui suit

On suppose alors (Fig. 1.5) que la nappe Σ est confondue avec le plan horizontal (O, x, y) . Ainsi, en posant :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_p = \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{n}_p \cdot \overrightarrow{PM} = z$$

On peut écrire :

$$w(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \Gamma(P) \left(\frac{1}{\|PM\|^3} - \frac{3z^2}{\|PM\|^5} \right) dS_P \quad (1.20)$$

On considère ensuite que le point M tend vers un point M_0 de (\mathcal{L}) sur la frontière $\partial\Sigma$. L'intégrale dans l'équation (1.20) doit être alors considérée en partie finie au sens d'Hadamard mais son noyau est simplifié car $M_0(x_0(y), y)$ est un point du plan horizontal. Par ailleurs le domaine d'intégration (Σ) est le lieu des points $P(x_p, y_p)$ tel que $y_p \in [-b/2, b/2]$ et $x_p \in [x_0(y_p), +\infty[$. Ainsi :

$$\begin{aligned} w(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \frac{\Gamma(P)}{\|PM\|^3} dS_P \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{P \in \Sigma} \frac{\Gamma(P)}{\left[(x_0(y) - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \right]^{3/2}} dS_P \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y_P) \int_{x_0(y_P)}^{+\infty} \frac{dx_P dy_P}{\left[(x_0(y) - x_P)^2 + (y - y_P)^2 \right]^{3/2}} \end{aligned}$$

Une intégration par partie vis-à-vis de la variable x_p conduit à :

$$\begin{aligned} w(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y_P) \left[\frac{1}{(y - y_P)^2} \times \frac{x_P - x_0(y)}{\sqrt{(x_0(y) - x_P)^2 + (y - y_P)^2}} \right]_{x_0(y_P)}^{+\infty} dy_P \\ w(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma(y_P)}{(y - y_P)^2} \left[1 + \frac{x_0(y) - x_0(y_P)}{\sqrt{(x_0(y) - x_0(y_P))^2 + (y - y_P)^2}} \right] dy_P \quad (1.21) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'expression de la vitesse induite par la nappe tourbillonnaire en un point de (\mathcal{L}) donnée en (1.15).

1.3.3 Théories asymptotiques instationnaires

Parallèlement aux théories stationnaires, de nombreuses démarches ont cherché à décrire une ligne portante en écoulement instationnaire. Directement issus des travaux de Van Dyke, ceux de James (1975) abordent une telle théorie sous l'angle linéarisé. La décomposition de l'aile et du sillage en deux domaines est similaire à celle proposée par Van Dyke. James résout le problème intérieur à l'aide de la théorie linéarisée du profil en écoulement instationnaire. Le problème extérieur se réduit à une ligne de singularités dont la densité varie en temps et en espace, accompagnée par une nappe tourbillonnaire convectée. Les mouvements mis en œuvre sont de faibles fréquences ce qui permet de considérer que la vitesse induite

est constante sur la corde dans chaque section. Cette théorie est commentée par Van Holten (1977) qui tente, par ailleurs, d'effectuer un parallèle avec la méthode de Weissinger (comme l'ont fait Ashley et Landhal en stationnaire). La conclusion est que la modélisation de Weissinger, pour le problème extérieur en écoulement instationnaire, n'est pas valable du fait de l'absence du pendant instationnaire au théorème de Pistolesi. Plus tard, Ahmadi et Widnall (1985) ont repris l'approche de James et Van Holten pour la reformuler rigoureusement.

Dans le même temps, Cheng (1975) s'attache aux ailes de forme en plan complexe en écoulement instationnaire et en mouvement harmonique. Celui-ci présente un point capital dans l'approche de ligne portante instationnaire. En effet, ce problème n'est plus caractérisé par deux longueurs caractéristiques, mais trois : la longueur de corde C , celle de l'envergure B et la longueur d'onde ℓ du mouvement harmonique de l'aile,

$$\ell = \frac{2\pi V_\infty}{\omega} \quad \text{où } \omega \text{ est la pulsation du mouvement.}$$

On distingue alors cinq domaines fréquentiels :

- très basses fréquences : $C \ll B \ll \ell$,
- basses fréquences : $C \ll B = O(\ell)$,
- fréquences intermédiaires : $C \ll \ell \ll B$,
- hautes fréquences : $C = O(\ell) \ll B$,
- très hautes fréquences : $\ell \ll C \ll B$.

Notons que les deux premiers domaines constituent la plage propre à la plupart des applications classiques de la théorie de la ligne portante telles que les pales d'hélicoptères et d'éoliennes, la propulsion maritime... Cette dernière constitue un exemple traité par Cheng et Murillo (1984) dans une théorie généralisée pour les deux domaines de basses fréquences. Le problème intérieur est réduit à la résolution d'un problème quasi-stationnaire bi-dimensionnel auquel sont adjointes deux corrections, l'une instationnaire et l'autre tri-dimensionnelle. Le domaine extérieur reste similaire à celui proposé par James (1975) et Van Holten (1977). L'utilisation d'un système de coordonnées polaires complique sensiblement la méthode.

Ces travaux ont pour but d'établir une théorie valide dans les domaines des basses et très basses fréquences. Aucune approche ne propose une théorie valide dans tout le domaine fréquentiel hors les travaux de Guermond et Sellier (1991, 1990). La théorie unifiée proposée par ces auteurs pour des ailes de forme en plan quelconque en mouvement harmonique est remarquable par sa rigueur théorique et la complexité de sa mise en œuvre pratique. Leurs travaux s'attachent à résoudre asymptotiquement l'équation intégrale obtenue grâce à une fonction de Green et la condition de Kutta-Joukowski à l'aide de la technique des développements asymptotiques raccordés.

Comme nous l'avons déjà vu, l'utilisation de cet outil rend nécessaire la partition du domaine de calcul en sous domaines caractérisés par leur distance au point de contrôle. Ainsi, Guermond et Sellier ont explicité une décomposition toujours sous-jacente dans les travaux précédents (notamment pour James, 1975, Van Holten, 1977).

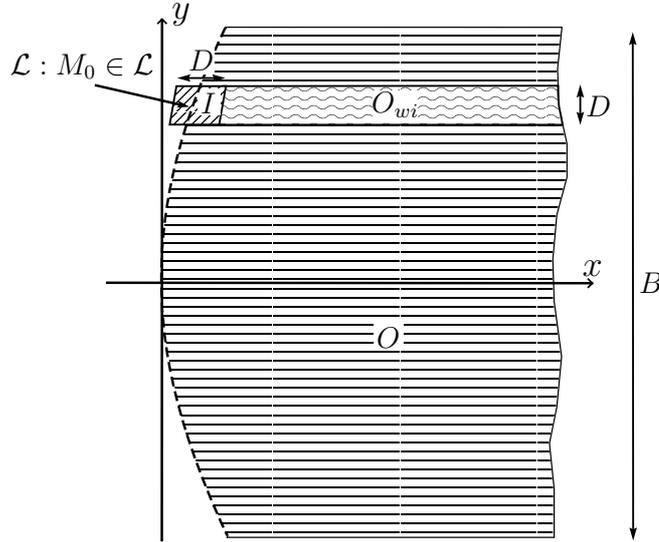


FIG. 1.6 – Décomposition du domaine

L'influence de la répartition tourbillonnaire sur l'aile (S) et son sillage (Σ) en un point $M \in (S)$ peut être décomposée en trois contributions :

- la première est due aux tourbillons situés à une distance de l'ordre de C du point M . Ainsi, on définit un domaine intérieur I dont la dimension caractéristique D est telle que : $C \ll D \ll B$.
- la seconde est due à un premier domaine extérieur, O_{wi} , constitué des points du sillage situés dans le prolongement du domaine intérieur et distants de B ou plus du point M ,
- auxquelles on adjoint le domaine extérieur, noté O , qui est constitué des points situés en dehors de O_{wi} , à une distance de M de l'ordre de B ou plus.

La vitesse induite en M est donc la somme des contributions des deux domaines I et $O_{wi} \cup O$:

$$w(M) = w_{in}(M) + w_{out}(M)$$

La dimension de référence du domaine extérieur étant B et les détails de la géométrie de l'aile étant de l'ordre de C , l'aile tend asymptotiquement, vers une ligne portante (\mathcal{L}). Le point de calcul M devient un point M_0 de (\mathcal{L}) et, ainsi, vu du domaine extérieur, aucune distinction ne peut être faite entre M et M_0 . Contrairement à ce que supposent James et Van Holten, la vitesse n'est pas constante sur la

corde mais admet une dépendance harmonique (également vu par Ahmadi et Widnall, 1985) :

$$w_{out}(M) = e^{-ikx} \cdot w_{out}(M_0)$$

Le déphasage e^{-ikx} traduit le mouvement périodique de l'aile où k est le nombre d'onde du mouvement construit sur la corde de l'aile : $k = \omega C/V_\infty$ (ω est la pulsation du mouvement).

Le domaine O_{wi} est caractérisé par deux dimensions. La dimension dans la direction de l'écoulement est B alors que la grandeur caractéristique transversale est C . Par hypothèse $B/C \gg 1$, donc O_{wi} peut être considéré comme une nappe tourbillonnaire semi-infinie dont la frontière amont est alignée avec la tangente locale à la ligne portante en M_0 et dont la répartition tourbillonnaire est alignée avec cette tangente. De même que précédemment, un déphasage intervient au passage de M à M_0 :

$$w_{wi}(M) = e^{-ikx} \cdot w_{wi}(M_0)$$

La dimension du domaine intérieur est de l'ordre de D en envergure et en corde. En première approximation, seule la composante des tourbillons qui est alignée avec la tangente locale à la ligne portante en M_0 est à considérer (Devinant, 1998). De plus, ces tourbillons sont pris constants dans la direction transversale du domaine intérieur. Cette vitesse peut alors être considérée comme étant d'origine bi-dimensionnelle.

La réunion de ces deux domaines crée une vitesse bi-dimensionnelle instationnaire w_{2D} , justifiant ainsi les approches déjà utilisées par Ahmadi et Widnall (1985), James (1975), Van Holten (1977). L'utilisation que propose Devinant (1998) de cette décomposition a permis une application industrielle dans le domaine des rotors d'hélicoptères (Costes *et al.*, 1998, Le Bouar-Coppens, 1999), mais uniquement validée pour des ailes droites.

Devinant (1998) montre qu'il est possible de simplifier la théorie unifiée dans ces cas. En effet, en se limitant à des mouvements dont la longueur d'onde est de l'ordre de B ou plus, on peut considérer que $k = o(1)$ et donc que la vitesse induite est constante sur la corde dans chaque section (James, 1975). Ainsi, on peut construire une méthode de marche en temps pour la ligne portante instationnaire. Cette démarche, permet également de s'affranchir du mouvement harmonique de l'aile et de la dépendance en x de la vitesse induite que l'on trouve dans la théorie de Guermond et Sellier.

En considérant le domaine $I \cup O_{wi}$ et le domaine extérieur O , la vitesse induite en un point M_0 de la ligne portante s'écrit :

$$w(M_0) = w_{2D}(M_0) + w_{out}(M_0) - w_{wi}(M_0) + o(1/\mathcal{R})$$

car l'influence du sous domaine O_{wi} est déjà comptabilisée dans le terme dû au domaine O . Devinant propose l'utilisation de la théorie du profil linéarisé en écoulement instationnaire pour déterminer w_{2D} .

Pour le domaine extérieur O , l'aile et son sillage sont représentés par une répartition surfacique de tourbillons de densité $\vec{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y)$. La vitesse induite par un tel système est obtenue par la relation de Biot et Savart (voir aussi Bisplinghoff *et al.*, 1955) :

$$w_{out}(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{L} \cup O} \frac{\gamma_y(\xi, \eta)(x - \xi) + \gamma_x(\xi, \eta)(y - \eta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (1.22)$$

Cette intégrale est à considérer en partie finie car le point de calcul est un point du domaine d'intégration. Une mise en œuvre numérique découlant de cette modélisation a été réalisée pour des ailes droites et donne pour celles-ci des résultats consistants et en accord avec les méthodes potentielles instationnaires.

Comme nous venons de le voir, les approches asymptotiques de la ligne portante ont permis d'étendre considérablement le champ d'application de la théorie originale. Bien que conceptuellement différentes, la théorie asymptotique et l'approche classique permettent d'envisager des applications industrielles nombreuses. Certaines approches (notamment instationnaires et pour des formes en plan complexe) restent encore incompatibles avec ces applications, c'est d'ailleurs la motivation principale de ce travail de thèse. Le corollaire de ces applications est évidemment une grande rapidité d'exécution, alors que l'inconvénient des extensions à des formes arbitraires et aux écoulements instationnaires de la théorie asymptotique est l'apparition d'un formalisme qui impose un traitement numérique plus complexe. Parmi ces outils, l'intégration au sens des parties finies d'Hadamard tient une grande place et justifie le chapitre qui suit.

1.4 Traitement des intégrales singulières

Dans la plupart des problèmes aux limites, des solutions sont trouvées sous la forme de fonctions de Green qui satisfont les équations différentielles partielles à l'intérieur du domaine et un jeu de conditions aux limites sur la frontière du domaine. Ces solutions, généralement appelées potentiel de simple ou double couche, peuvent être mises sous la forme d'une distribution de densité connue sur la frontière et conduisent à une formulation intégrale du problème.

Euvrard (1984) démontre que la formulation intégrale des potentiels de simple et de double couche ne sont pas singulières lorsque le point de calcul tend vers le support. Il en va de même pour la dérivée normale du potentiel de simple couche, mais pas pour celle du potentiel de double couche. Or la condition de glissement sur l'aile s'exprime directement à l'aide de la dérivée normale, en un point du support, de ce potentiel. Euvrard rappelle également que la limite, lorsque le point de calcul tend vers le support, de cette dérivée normale existe et n'est autre que la partie finie au sens d'Hadamard de la formulation intégrale. Ainsi, naturellement, la partie finie apparaît dans l'expression des vitesses induites à la suite de ce passage à la limite.

L'acception mathématique des intégrales en partie finie consiste généralement à établir une relation fonctionnelle (on parle de régularisation) entre des intégrales singulières et des valeurs numériques utiles. Dans ce cadre, les fonctions mises en œuvre vérifient une propriété particulière qui assure l'existence des parties finies de ces intégrales singulières. Cette propriété est la *condition de Hölder*. Si $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} et φ une fonction définie sur ce segment, on dit que φ vérifie la condition de Hölder lorsque

$$\exists A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \beta \in]0, 1], \forall x_1, x_2 \in [a, b], |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < A |x_1 - x_2|^\beta \quad (1.23)$$

A est appelée constante de Hölder et β exposant de Hölder. Les fonctions vérifiant cette condition sont dites *Hölderiennes*. Notons que si $\beta = 1$, la condition de Hölder s'appelle condition de Lipschitz. C'est pourquoi certains auteurs nomment la condition de Hölder, condition de Lipschitz d'ordre β . Dans ce qui suit, nous aborderons deux types de régularisation : l'intégration au sens de Cauchy et celle au sens des parties finies d'Hadamard.

1.4.1 Valeur principale d'une intégrale singulière

En aérodynamique, la notion de vitesse induite conduit au calcul en valeur principale de certaines intégrales impropres. Dès la formalisation du modèle de ligne portante par Prandtl (1923), le problème du calcul d'intégrale singulière est apparu important. Ainsi Prandtl parle de « chief value » à savoir de valeur principale au sens de Cauchy pour le calcul de $f_0^b \frac{d\Gamma}{dx} \frac{dx}{x-x'}$.

Plus généralement, le problème des intégrales en valeur principale survient dès lors que l'on considère une intégrale du type

$$\int_a^b \frac{\varphi(x).dx}{x-c}, \quad a < c < b. \quad (1.24)$$

Considérons en premier lieu le cas simple où $\varphi \equiv 1$, et calculons l'intégrale impropre :

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (1.25)$$

Comme le rappellent Polyanin et Manzhirov (1998), la valeur de cette intégrale dépend fortement de la manière dont ε_1 et ε_2 tendent vers 0. C'est pourquoi cette intégrale singulière n'existe pas. Par contre, il est possible de lui donner une signification particulière en supposant qu'il existe une relation entre ε_1 et ε_2 , par exemple : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Ainsi, la *Valeur principale de Cauchy* de l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$, est définie par :

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a} \quad (1.26)$$

L'hypothèse qui permet de calculer la valeur principale de Cauchy est de faire tendre vers 0 un voisinage symétrique autour du point singulier. Ainsi, la singularité tombe d'elle-même lors du calcul de l'intégrale impropre par l'équation (1.25).

Reprenons le cas général de l'intégrale (1.24) en considérant que φ est une fonction Hölderienne. Lorsque l'on applique la définition (1.26) à cette intégrale, il vient :

$$\int_a^b \frac{\varphi(x).dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x) \cdot \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \varphi(x) \cdot \frac{dx}{x-c} \right) \quad (1.27)$$

Par ailleurs, il est possible d'écrire :

$$\int_a^b \frac{\varphi(x).dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

La première intégrale, bien qu'impropre, est convergente. En effet, puisque la fonction φ est Hölderienne, on a d'après (1.23) :

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} \right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\beta}}, \quad \text{avec } 1 - \beta < 1$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale. L'autre intégrale étant donnée par (1.26), l'intégrale en valeur principale au sens de Cauchy vaut donc :

$$\int_a^b \frac{\varphi(x).dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \ln \frac{b-c}{c-a} \quad (1.28)$$

On retrouve une propriété bien connue des intégrales en valeur principale : faire disparaître le terme singulier.

Si théoriquement la notion de valeur principale n'a de sens que pour une fonction Hölderienne, démontrer cette propriété pour des fonctions non triviales ou connues numériquement n'est pas chose facile. Néanmoins, l'exposé précédent reste valable si la fonction φ n'est pas Hölderienne mais continûment dérivable (hypothèse plus forte que la condition de Hölder). En effet, si φ est dérivable alors

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} = \varphi'(c)$$

La continuité de la dérivée φ' assure l'existence de l'intégrale.

L'autre avantage de cette hypothèse est de pouvoir reconstruire la valeur du noyau de l'intégrale au voisinage de la singularité lors du calcul numérique d'intégrales en valeur principale, à condition de déterminer la dérivée φ' .

1.4.2 La partie finie au sens d'Hadamard

Lorsque la singularité est d'ordre plus élevé, les intégrales ne peuvent plus être considérées en valeur principale. Or la forme particulière des intégrales mises en oeuvre en aérodynamique fait apparaître des singularités en puissance. C'est pourquoi il est pratique d'utiliser la notion d'intégrales en partie finie au sens d'Hadamard (1932). Lors de ses travaux sur les singularités des fronts d'onde, celui-ci a été confronté à un problème inédit : donner une signification à des intégrales du type

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{(b-x)^{1+\alpha}}, \quad \alpha \in]0, 1[\quad (1.29)$$

où f est supposée lipschitzienne sur $[a, b]$.

Hadamard a proposé une interprétation similaire aux intégrales en valeur principale. Ainsi, si l'on considère une fonction $g : [a, b] - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en tout point de son domaine de définition et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on peut envisager le calcul de l'intégrale :

$$\mathcal{J}(\varepsilon) = \int_a^{x_0-\varepsilon} g(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b g(x)dx$$

$\mathcal{J}(\varepsilon)$ peut être écrit comme étant la somme d'une partie régulière $\mathcal{R}(\varepsilon)$ (*i.e.* $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}(\varepsilon)$ existe) et d'une partie irrégulière $\mathcal{I}(\varepsilon)$. La partie finie au sens d'Hadamard de $\int_a^b g(x)dx$ est alors définie par :

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x_0-\varepsilon} g(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b g(x)dx - \mathcal{I}(\varepsilon) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{R}(\varepsilon) \quad (1.30)$$

La différence majeure avec la définition (1.27) est que la partie irrégulière apparaît explicitement. Prenons l'exemple de l'intégrale :

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{1+n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

À l'évidence cette intégrale est singulière. Par contre, une intégration classique donne :

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^{1+n}} = \frac{1}{n\varepsilon^n} - \frac{1}{n(a-b)^n}$$

et permet, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, d'exhiber la partie singulière. Hadamard ignore la présence de cette partie divergente et exprime la partie finie en ne prenant en compte que la partie convergente :

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{1+n}} = -\frac{1}{n(a-b)^n} \quad (1.31)$$

Finalement on peut considérer que le problème d'Hadamard est une généralisation de l'intégrale en valeur principale de Cauchy. En effet, la valeur principale de Cauchy est une intégrale en partie finie particulière pour laquelle la partie irrégulière s'annule comme le montre l'équation (1.27). De plus, suivant la définition (1.30), il est possible de retrouver le cas particulier des intégrales en valeur principale.

Notons que la définition d'Hadamard est robuste car si n prend des valeurs négatives, la définition de l'intégrale en partie finie permet de retrouver la valeur de l'intégrale au sens de Riemann.

Le cas général de la singularité en puissance entière ne trouve pas de solution aussi simple que l'intégrale de Cauchy, notamment pour une raison simple qui est la classe de fonction nécessaire au numérateur. De manière similaire aux intégrales de Cauchy, ces fonctions doivent non seulement être Hölderiennes, mais également leurs multiples dérivées jusqu'à la n -ième dérivées lorsque la singularité est d'ordre $1+n$. Il est illusoire de vérifier la propriété de Hölder pour les dérivées des fonctions qui interviennent dans des problèmes pratiques, surtout si ces fonctions sont connues de manière discrète.

Le problème général est donc d'obtenir une définition utilisable en pratique pour l'intégrale :

$$H_{f,a,b}^n = \int_a^b \frac{f(x)dx}{(b-x)^{1+n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Les auteurs (notamment Delbourgo et Elliott, 1994, Korsunsky, 1997) considèrent une fonction f définie sur $[a, b]$ et telle que $f^{(n+1)}$ existe et est continue sur $[a, b]$. On remplace donc la condition de Hölder par une condition de continuité de la $(n+1)$ -ième dérivée, ce que nous utiliserons en pratique lorsque nous aurons besoin de ce formalisme. On peut alors écrire un développement en série de Taylor de cette fonction au voisinage de b :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k f^{(k)}(b) (b-x)^k}{k!} + \mathcal{O}((b-x)^{n+1}) \quad (1.32)$$

Reprenons notre intégrale ; elle devient :

$$H_{f,a,b}^n = \int_a^b \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k f^{(k)}(b) (b-x)^k}{k!}}{(b-x)^{n+1}} dx + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(b) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{1+n-k}}$$

Or, f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$, donc :

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(b)(b-x)^k \underset{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}}{\approx} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} (b-x)^{n+1} f^{(n+1)}(b)$$

ce qui assure l'existence de la première intégrale. Connaissant le résultat (1.31), on peut alors présenter une définition pratique de l'intégrale en partie finie au sens d'Hadamard :

$$H_{f,a,b}^n = \int_a^b \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-x)^k / k!}{(b-x)^{n+1}}}{(b-x)^{n+1}} dx + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(n-k)k!(a-b)^{n-k}} \quad (1.33)$$

où la première intégrale est une intégrale convergente par prolongement par continuité en b du noyau de l'intégrale.

L'équation (1.33) constitue une définition de l'intégrale en partie finie telle que l'utilisent les auteurs. Notons, que lorsque la singularité n'est plus aux bornes mais à l'intérieur du segment, cette définition demeure toujours valable à gauche de la singularité. À droite de celle-ci, le pendant est aisé à obtenir suivant une démarche similaire. Les intégrales mises en oeuvre dans la théorie de la ligne portante sont d'ailleurs de ce type. La singularité se situe au milieu de l'intervalle d'intégration. De plus, la fonction au numérateur est également discontinue en ce point, mais continue à droite et à gauche, ce qui rend la décomposition en deux domaines (à droite et à gauche de la singularité) indispensable.

1.4.3 Approximation d'intégrales hypersingulières

Comme nous l'avons vu à la section précédente, la mise en oeuvre des intégrales d'Hadamard nécessite surtout une redéfinition analytique de l'intégrale. Bien souvent, cette définition utilisant des intégrales riemanniennes suffit à lever tout problème d'intégration numérique.

Néanmoins, dans des cas moins analytiques voire totalement numériques, le recours à des algorithmes d'évaluation peut s'avérer nécessaire. C'est pourquoi cette section vise à présenter dans les grandes lignes quelques approches numériques classiques du calcul de certaines intégrales hypersingulières.

De nombreux auteurs se sont intéressés au problème des intégrales en partie finie depuis Hadamard. Certains travaux récents apportent un éclairage nouveau sur ce problème. Les plus pertinents sont ceux d'Elliott (1993) et ont pour objectif de proposer une analyse d'algorithmes existants pour l'évaluation approchée de certaines intégrales en partie finie au sens d'Hadamard.

Delbourgo et Elliott (1994) puis Korsunsky (1997) ont ensuite proposé plusieurs algorithmes pour l'évaluation d'intégrales du même type que l'équation (1.29). Tous s'appuient sur la définition (1.33), plus pratique, de l'intégrale en partie finie au sens d'Hadamard.

Mentionnons immédiatement que ces approches sont de deux types suivant qu'elles s'intéressent au noyau de l'intégrale $H_{f,a,b}^n$ dans son ensemble, ou bien, uniquement au numérateur du noyau. Chaque

approche fait apparaître une relation de quadrature caractéristique de la méthode utilisée.

Lorsque la régularisation traite le noyau dans son intégralité, l'approximation est souvent issue de l'intégration par quadrature gaussienne. Dans le cas régulier, celle-ci permet d'évaluer numériquement une intégrale sur un segment à l'aide d'un faible nombre de points. Ainsi, un polynôme de degré $2n-1$ peut être intégré exactement à l'aide de n points intermédiaires. Pour cela, une fonction de poids (déterminée à l'aide des zéros des polynômes de Legendre) doit être introduite et un changement de variable permet de passer du segment initial d'intégration sur le segment $[-1, 1]$ qui est, par définition, l'intervalle d'intégration de la méthode de Gauss. Les points intermédiaires nécessaires à l'évaluation de l'intégrale ne sont pas libres : ils sont imposés par la fonction de poids et l'ordre n de la méthode, cela demeure souvent un point délicat des méthodes d'intégration de Gauss.

Ainsi, si P est un polynôme de degré au plus $2n+1$:

$$\int_{-1}^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^n \omega(t_i)P(t_i) \text{ avec } \omega(t_i) = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{t-t_j}{t_i-t_j} dt \quad (1.34)$$

où les (t_k) sont les zéros du $n^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre Le_n :

$$Le_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Différents auteurs tels Erdogan *et al.* (1973) et Korsunsky (1997) ont présenté des fonctions de poids ω modifiées pour le traitement numérique des intégrales au sens respectivement de Cauchy et d'Hadamard. Si les fonctions de poids pour les intégrales de Cauchy sont très similaires à celles introduites pour les intégrales régulières (1.34), celles proposées par Korsunsky pour les intégrales au sens d'Hadamard sont particulièrement complexes.

Néanmoins, si la convergence de ces quadratures est, d'après les auteurs, rapide, ces algorithmes requièrent un travail mathématique analytique préparatoire considérable. En effet, les fonctions de poids diffèrent fortement suivant les fonctions mises en œuvre. Ces fonctions font l'objet de recherches *a priori* dans les domaines concernés de la Physique pour déterminer les quadratures optimales pour un problème donné, ce qui n'est pas à notre connaissance le cas en aérodynamique. Par ailleurs, ces algorithmes demandent l'évaluation de fonctions spéciales et le calcul de zéros de polynômes de Jacobi et de Legendre qui présentent l'inconvénient d'alourdir considérablement la démarche.

D'autres travaux d'un abord plus simple visent à approcher la fonction au numérateur dans l'intégrale $H_{f,a,b}^n$ pour faciliter son évaluation. On doit les travaux les plus aboutis à Elliott (1993) et Delbourgo et Elliott (1994). Le premier s'est attaché au problème originel d'Hadamard avec un fonction lipschitzienne au numérateur et une singularité de la forme $1/(x-b)^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Delbourgo a ensuite étendu la démarche à des singularités plus intenses de la forme $1/(x-b)^{1+n}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Les hypothèses sur le numérateur sont celles qui sous-tendent la définition (1.33) : on suppose que $f^{(1+n)}$ existe et est continue sur $[a, b]$. On effectue un changement de fonction telle que :

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = f((b-a)x + a)$$

On montre alors que :

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-b)^{1+n}} dx = \frac{1}{(b-a)^{1+n}} \int_0^1 \frac{g(x)}{(x-1)^{1+n}} dx + \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(b) \ln(b-a) \quad (1.35)$$

On approche alors la fonction g par un polynôme de Bernstein $B_N(g)$ de degré au plus N :

$$B_N(g)(x) = \sum_{k=0}^N C_N^k x^k (1-x)^{N-k} g\left(\frac{k}{N}\right)$$

Rappelons que si g est une fonction continue sur $[0, 1]$, une propriété du polynôme de Bernstein $B_N(g)$ est qu'il converge uniformément vers g lorsque $N \rightarrow \infty$.

Par linéarité de l'intégrale au sens d'Hadamard, l'intégrale en partie finie de $B_N(f)$ entre 0 et 1 est la somme des intégrales en partie finie de chacun des monômes $x^k (1-x)^{N-k-1-n}$, ce qui au regard de l'équation (1.21.) est un résultat immédiat. On peut alors écrire une quadrature suivant l'ordre du polynôme :

$$H_{g,0,1}^{n,N} = \frac{N^n (N-n)!}{N!} H_{B_N(g),0,1}^n \text{ avec } \lim_{N \rightarrow \infty} H_{g,0,1}^{n,N} = H_{g,0,1}^n$$

ce qui d'après l'équation (1.35) donne le résultat pour $H_{f,a,b}^n$

Cette quadrature a le grand avantage d'être simple à tel point qu'il est envisageable de concevoir une routine « boîte noire » pour le calcul d'intégrales en partie finie. Néanmoins, elle est difficilement adaptable à une fonction connue de manière discrète – à moins de connaître la valeur de la fonction f en $((b-a)\frac{k}{N} + a)$. De plus, la convergence étant assurée lorsque $N \rightarrow \infty$, la subdivision doit être fine et le degré du polynôme d'approximation élevé. Or d'après les auteurs, la convergence est relativement lente (en $1/N$).

Malgré ces inconvénients, cette approche est probablement la plus utilisable lorsqu'une solution analytique n'est pas envisageable ou bien lorsque de nombreuses intégrales singulières sont à évaluer. C'est pourquoi nous avons voulu évaluer en pratique cette méthode afin de choisir ce que nous utiliserons pour le calcul d'intégrales en partie finie dans nos méthodes de ligne portante : une résolution numérique ou bien la définition pratique de ces intégrales (1.33).

Pour cela, nous avons choisi l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(1-x)^3} dx$$

Les deux approches ont fait l'objet d'une étude de convergence. Pour la méthode analytique, elle consiste à discrétiser finement l'intervalle d'intégration pour améliorer la précision des intégrations (au sens de Riemann) numériques par une méthode de type « trapèzes ». En ce qui concerne la méthode numérique, elle consiste à augmenter le degré du polynôme de Bernstein interpolateur.

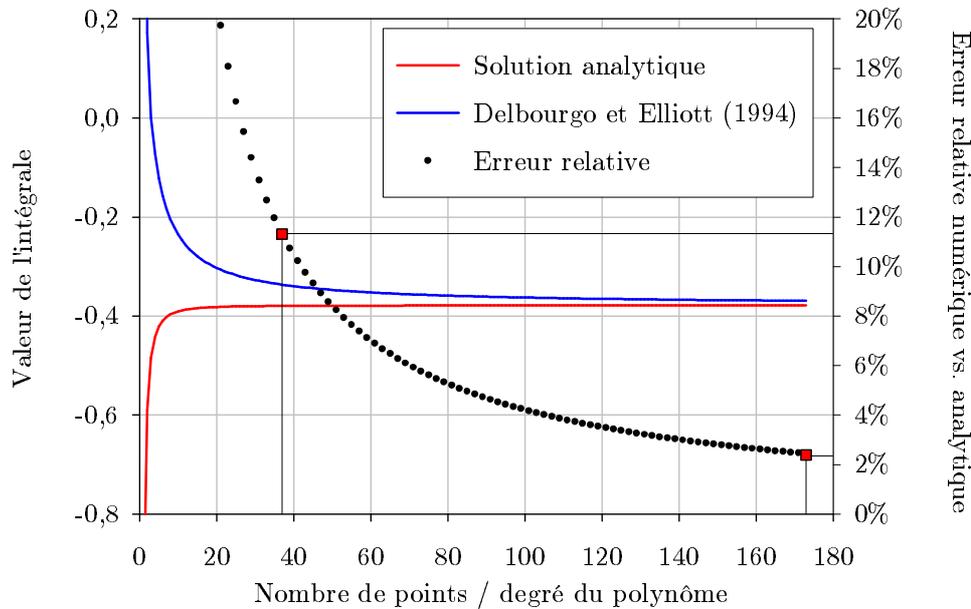


FIG. 1.7 – Évaluation d'une partie finie numériquement et analytiquement

La figure 1.7 montre ces deux calculs et l'erreur relative commise par la méthode numérique. En effet, la méthode analytique converge très rapidement (et peut donc être prise comme référence), alors que la méthode numérique, comme annoncé, est très lente. Par ailleurs, la quadrature fait intervenir les fonctions Gamma d'Euler et leurs dérivées qui font apparaître des réels très grands. A tel point qu'un calcul en simple précision ne permet pas de considérer un polynôme de degré supérieur à 37 (Fig. 1.7, premier carré), ce qui conduit à une erreur relative de plus de 11%. Un calcul en double précision permet de continuer la convergence : jusqu'à un polynôme de degré 173 et une erreur encore supérieure à 2%. Il n'est alors plus possible de continuer le calcul sans sortir de la gamme des réels en double précision.

Certes, il est possible d'accélérer la convergence de ces méthodes au prix d'un plus grande complexité de mise en œuvre et d'une exécution plus lente. Néanmoins, pour minimiser l'erreur de méthode, nous utiliserons l'approche analytique pour déterminer les parties finies auxquelles nous serons confrontés. Comme nous le verrons dans la suite, cette option est d'autant plus valable que les parties finies que nous devons évaluer sont similaires les unes aux autres ce qui motive moins l'utilisation de routines dédiées à ce genre de calculs.

Une ligne portante stationnaire

Sommaire

2.1	Une ligne portante asymptotique	35
2.1.1	Discrétisation du sillage	36
2.1.2	Gradient de circulation	39
2.1.3	Résultats et validations	40
2.2	Développement d'une nouvelle méthode de ligne portante	43
2.2.1	Équation implicite de la ligne portante	44
2.2.2	Mise en place de la résolution itérative	44
2.2.3	Le problème de l'aile en flèche	46
2.2.4	Résultats et validations	48
2.2.5	Une ligne portante classique étendue	55
2.3	Application - Calculs sur pales d'hélicoptère	56
2.3.1	Modélisation d'une pale	57
2.3.2	Confrontations des résultats	63

Bien que non fondée théoriquement à l'origine, la ligne portante a connu de nombreux travaux théoriques grâce à une approche asymptotique du problème. Ceux-ci s'intéressent systématiquement à la détermination de la loi de circulation en envergure. Néanmoins, rares sont les mises en oeuvre pratiques de méthodes asymptotiques de ligne portante stationnaire pour des ailes en flèche et *a fortiori* pour des ailes courbes. La prise en compte totale de ces caractéristiques n'est due qu'aux récents travaux de Guermond (1990) qui propose des résultats numériques¹⁵ ou analytiques¹⁶. Parallèlement, l'approche classique de Prandtl et ses extensions empiriques connaissent de nombreuses applications. Mais la prise en compte de

¹⁵pour une aile courbe

¹⁶pour des ailes en dérapage

la forme complexe de l'aile est très imparfaite du fait de l'absence du terme w_c (1.17) et de partie finie pour l'expression de la vitesse induite (1.1).

C'est pourquoi nous présentons ici une méthode de calcul pour la ligne portante stationnaire issue de la théorie classique, donc implicite, qui prend en compte les effets de flèche et de courbure via w_c et l'expression en partie finie de la vitesse induite proposée par Guermond (1990). Ceci permet d'envisager une extension de la théorie de Prandtl à ce type de forme en plan. En effet, les démarches asymptotiques donnent une approximation (à l'ordre 1 en \mathcal{R}^{-1}) de la circulation, alors que les méthodes de Prandtl s'attachent à déterminer la solution d'un problème lié (*i.e.* $\Gamma = f(\Gamma)$).

Les problèmes implicites sont souvent traités de manière itérative, souvent, car une résolution directe (*i.e.* matricielle) peut être envisagée du fait de la linéarité de l'application f . Par rapport à une résolution matricielle, la résolution itérative offre la possibilité de modifier aisément le modèle. En effet, si f est une application linéaire et F sa matrice, tout changement dans la relation implicite impose la modification de la matrice F qui représente l'influence en un point i des singularités j , $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

La résolution itérative est une recherche de point fixe, *i.e.* on construit la récurrence $\Gamma^{(k+1)} = f(\Gamma^{(k)})$ jusqu'à ce qu'un test de convergence entre deux itérations successives soit satisfait. On obtient alors la solution de l'équation implicite à la précision souhaitée. La possibilité de relaxer l'algorithme itératif est bien évidemment utilisée en cas de besoin, ce qui ne modifie pas la solution tout en facilitant sa détermination à la précision souhaitée.

2.1 Une ligne portante asymptotique

Il nous apparaît ici indispensable de poser quelques appellations afin que le lecteur puisse identifier les différentes approches de la ligne portante. Dans ce qui suivra, nous appellerons systématiquement :

- *approche classique (de Prandtl)* : toute numérisation de la formulation implicite de Prandtl et de ses extensions empiriques comme nous les avons décrites au §1.1.2,
- *approche théorique de Guermond* : la théorie asymptotique explicite et ses résultats présentés dans Guermond (1990),
- *approche numérique asymptotique* : résultats issus de la numérisation de la théorie asymptotique de Guermond exposée ci-après¹⁷,
- *approche asymptotique implicite* : notre démarche de ligne portante issue de la théorie classique et implicite comme elle mais prenant en compte les effets de flèche et de courbure (cf. 2.2, page 43).

La première étape de ce travail a donc été de construire une démarche asymptotique pour le calcul de la répartition de circulation sur une aile en flèche et courbe. Nos travaux se sont évidemment appuyés sur les démonstrations de Guermond et Sellier et sur les travaux existant au laboratoire dans le domaine de la ligne portante. Ainsi, nous allons calculer la répartition en envergure du développement asymptotique de la circulation jusqu'à l'ordre \mathcal{R}^{-1} , incluant les termes logarithmiques en \mathcal{R}^{-1} grâce aux expressions de w_c et w_0 données en 1.3.2.

L'approche asymptotique de Guermond conduit à une formulation analytique puisque le système triangulaire s'appuie sur la connaissance analytique de la loi bi-dimensionnelle de circulation $\Gamma_0(y)$. Ainsi, le sillage est représenté par une surface tourbillonnaire de densité $\gamma_x = d\Gamma_0/dy$. Or, comme nous l'avons rappelé au chapitre 1.1.2, les mises en œuvre numériques classiques sont très généralement fondées sur une approximation de la circulation par une fonction constante par morceaux et un sillage composé d'une juxtaposition de tourbillons en fer à cheval et ne font pas apparaître la densité tourbillonnaire γ_x .

Pour rendre ces deux démarches compatibles, il a été nécessaire de discrétiser le sillage en s'attachant à ne conserver qu'une distribution surfacique tourbillonnaire localisée strictement suffisante pour assurer la précision du calcul sur une aile courbe.

Sur la base de la description classique de la ligne portante (exposée au §1.1.2), la ligne (\mathcal{L}) est discrétisée en n segments $S_i = [y_{b_i}, y_{b_{i+1}}]$ (Fig. 2.2). Les points de collocation y_i sont les milieux de ces segments. La forme de la ligne est donnée par une fonction analytique, $x_0 : y \mapsto x_0(y)$ de classe \mathcal{C}^2 . Une fonction définie par morceaux convient parfaitement à notre démarche.

¹⁷nous verrons d'ailleurs que celle-ci donne des résultats très similaires à la précédente

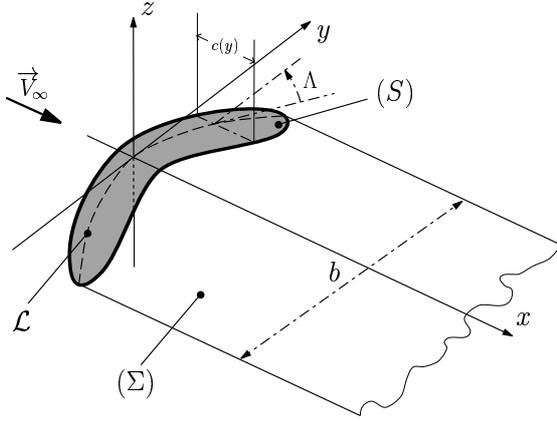


FIG. 2.1 – Notations

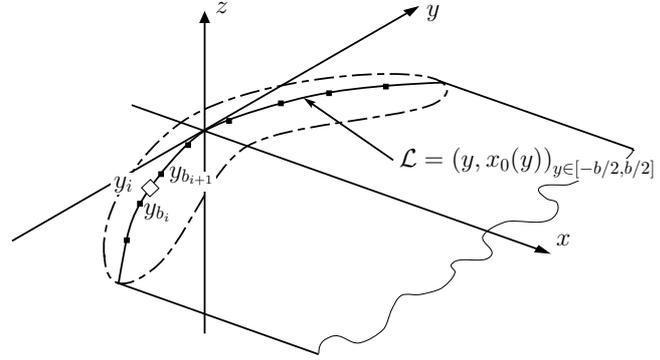


FIG. 2.2 – Discrétisation de la ligne portante

2.1.1 Discrétisation du sillage

La vitesse induite en un point par un champ de tourbillons étant inversement proportionnelle au carré de la distance entre les tourbillons et ce point, il est indéniable que l'influence d'une singularité lointaine sur le point courant est faible, voire négligeable. C'est pourquoi considérer un champ singulier d'ordre élevé (comme une répartition surfacique de tourbillons) en des zones éloignées du point courant ne semble pas nécessaire. Par ailleurs, le calcul d'un grand nombre d'intégrales du type : $\int_{P \in \text{nappe}} \frac{\vec{\gamma} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} dS_P$ augmente le temps de calcul.

L'expression analytique de la vitesse induite donnée par Guermond est :

$$w_0(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma_0(\psi)}{(y - \psi)^2} \left[1 + \frac{x_0(y) - x_0(\psi)}{\sqrt{(x_0(y) - x_0(\psi))^2 + (y - \psi)^2}} \right] d\psi \quad (2.1)$$

L'utilisation d'un schéma discret constitué de tourbillons en fer à cheval (Fig. 2.3) fait disparaître la partie finie. En effet, dans (1.7) seule l'intégrale sur la portion de la frontière $\mathcal{L} \subset \partial\Sigma$ est non nulle. Celle-ci est la forme continue de la relation de Biot et Savart à prendre en valeur principale au sens de Cauchy si le point de calcul appartient au domaine d'intégration. De plus, comme le rappelle Sellier (1990), la non prise en compte de la notion de partie finie constitue un « manque de rigueur » pour la ligne portante. Notre but est donc de conserver la notion de partie finie pour le calcul de la vitesse induite tout en ayant une description précise de la nature du sillage linéarisé.

Nous allons comparer plusieurs discrétisations de la répartition de circulation Γ_0 et donc plusieurs discrétisations du sillage. En effet, nous supposons que, sur chaque segment $S_j = [y_{b_j}, y_{b_{j+1}}]$, la fonction Γ_0 est constante et égale à $\Gamma_0(y_j)$, sauf sur un voisinage du point de contrôle courant M_{0_i} , où l'on supposera que la fonction Γ_0 évolue comme une fonction affine. La conséquence pour le sillage est une succession de tourbillons en fer à cheval issus des segments S_j , lorsque Γ_0 est une fonction constante ;

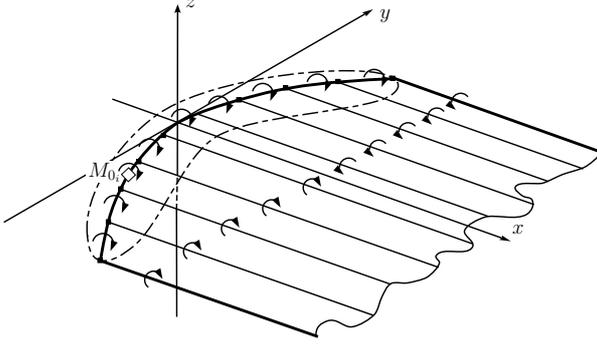


FIG. 2.3 – Sillage linéarisé en fer à cheval

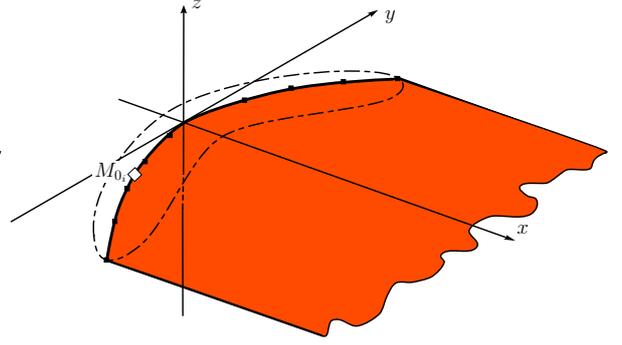
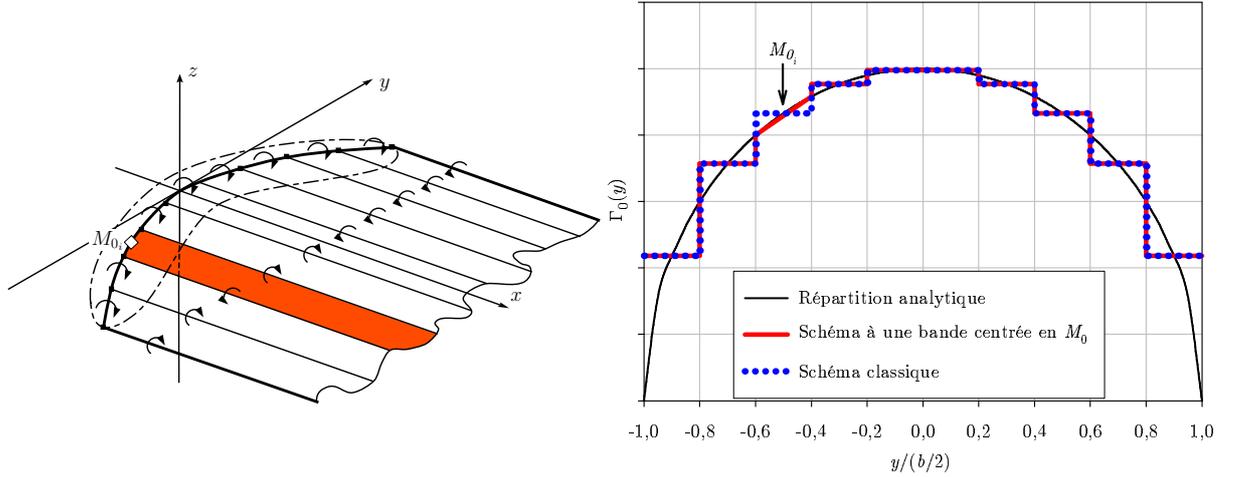


FIG. 2.4 – Sillage en nappe tourbillonnaire

et une bande de nappe tourbillonnaire de densité constante et égale au gradient de circulation, lorsque Γ_0 est une fonction affine. Si le voisinage s'étend sur plusieurs segments, on considérera Γ_0 comme une fonction linéaire par morceaux sur autant de segments.

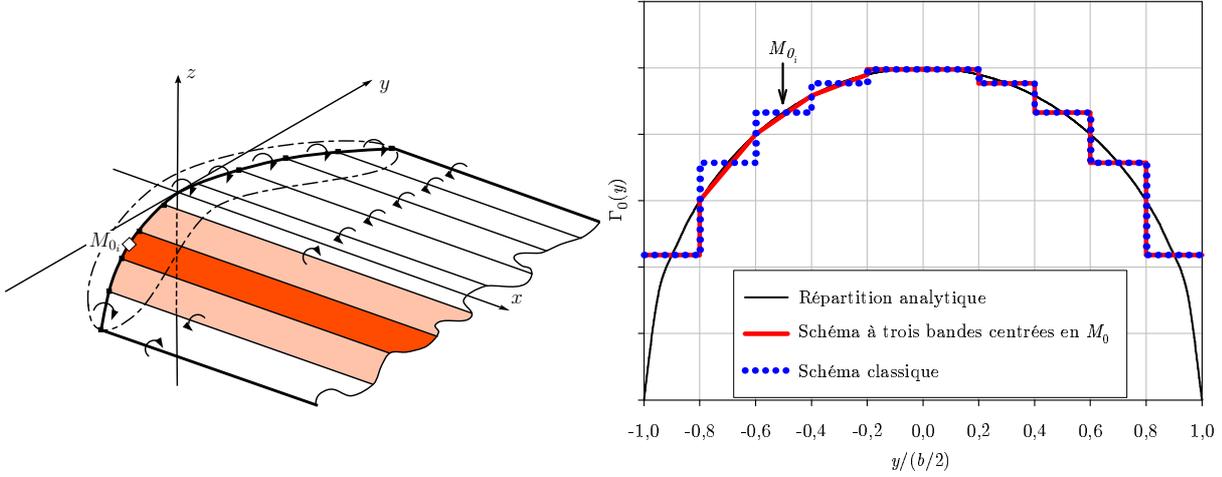
FIG. 2.5 – Schéma à une bande et $n - 1$ fers à cheval

Il reste à évaluer la taille idéale du voisinage du point M_{0_i} : pour cela, nous avons considéré, en premier lieu, un voisinage de l'ordre d'un segment (Fig. 2.5). En second lieu, nous avons étendu le voisinage sur trois segments : le segment qui contient le point courant et les deux segments adjacents (Fig. 2.6).

Le premier cas pouvant être déduit aisément du second, nous allons expliciter ce dernier dans ce qui suit. Ayant isolé n segments, on peut décomposer l'intégrale (2.1) en n composantes :

$$w_0(M_{0_i}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \frac{\Gamma(\psi)}{(y_i - \psi)^2} \left(1 + \frac{x_0(y_i) - x_0(\psi)}{\sqrt{(x_0(y_i) - x_0(\psi))^2 + (y_i - \psi)^2}} \right) d\psi \quad (2.2)$$

Cette équation permet de distinguer trois cas de figures. Le premier est le cas où $y_i \in S_j$: l'intégrale correspondante est singulière et il convient de la considérer en partie finie. Lorsque le point de contrôle

FIG. 2.6 – Schéma à trois bandes et $n - 3$ fers à cheval

n'appartient pas à la bande tourbillonnaire issue du segment $S_j = [y_{b_j}, y_{b_{j+1}}]$, les intégrales sont régulières et peuvent être évaluées à l'aide d'un schéma numérique classique. Si le segment d'intégration est en dehors du voisinage de M_{0_i} , ces intégrales dégènerent en une « simple » loi de Biot et Savart ponctuelle à évaluer pour un tourbillon en fer à cheval de circulation $\Gamma_0(y_j)$ et dont le tourbillon de tête est confondu avec le segment S_j :

$$\begin{aligned}
 w_0(M_{0_i}) &\approx \frac{1}{4\pi} \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i-1, i, i+1}}^N w_{FAC}(S_j \rightarrow y_i)}_{\text{Loi Biot Savart ponctuelle}} \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{S_{i-1} \cup S_{i+1}} \frac{\Gamma_0(\psi)}{(\psi - y_i)^2} \left(1 - \frac{x_0(\psi) - x_0(y_i)}{\sqrt{(x_0(\psi) - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2}} \right) d\psi}_{\text{Intégrales de Riemann pour les deux bandes voisines}} \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{S_i} \frac{\Gamma_0(\psi)}{(\psi - y_i)^2} \left(1 - \frac{x_0(\psi) - x_0(y_i)}{\sqrt{(x_0(\psi) - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2}} \right) d\psi}_{\text{Intégrale en partie finie pour la bande issue du segment courant}}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dans le cas où on considère un voisinage constitué d'une seule bande, l'intégrale de Riemann disparaît et le premier terme est sommé sur $j = 1, n$ avec $j \neq i$. Nous avons alors comparé ces différentes discrétisations de Γ_0 (et les modélisations du sillage qu'elles impliquent) à une approche classique du sillage de la ligne portante comme nous l'avons décrite au chapitre 1.1.2, ainsi qu'à l'approche asymptotique théorique de Guermond qui évalue l'équation (2.1).

2.1.2 Gradient de circulation

Au premier abord relevant du détail, le calcul du gradient de circulation $d\Gamma_0/dy$ n'est pas anodin. En effet, plus que le gradient de circulation, c'est l'interpolation linéaire de la circulation sur un ou plusieurs segments qui nous intéresse pour évaluer les intégrales (2.3).

Le gradient de circulation étant pris constant sur un panneau, on peut envisager plusieurs approches pour l'exprimer :

- un schéma aux différences finies d'ordre 2 sur les points de collocation $(y_i, \Gamma(y_i))$, éventuellement décentrées aux extrémités de l'aile,
- un schéma aux différences centrées d'ordre 2 sur les points de discrétisation $(y_{b_i}, \Gamma(y_{b_i}))$.

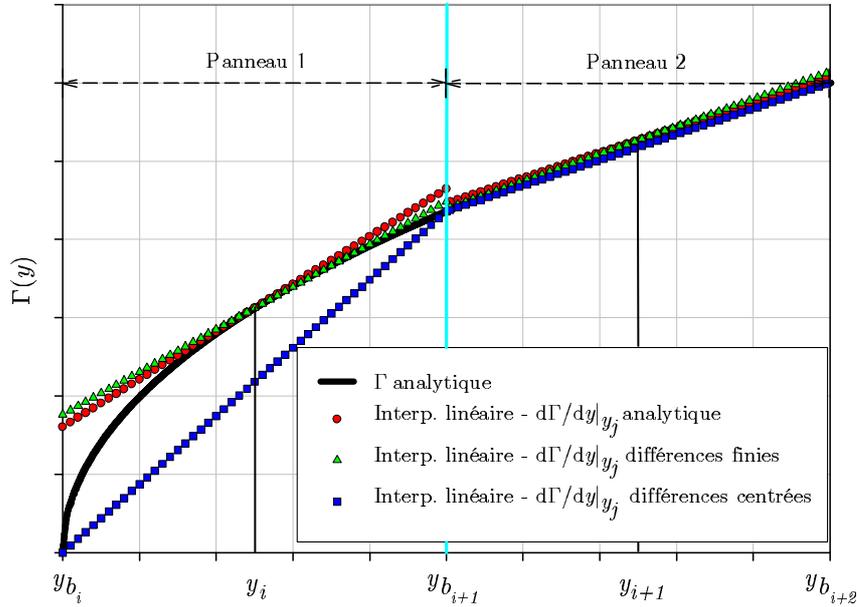


FIG. 2.7 – Interpolations linéaires de $\Gamma(y)$ sur la discrétisation

Pour illustrer cette alternative, on peut représenter ces deux choix pour une loi de circulation (Fig. 2.7). Quelle que soit l'approche retenue, l'évaluation du gradient en dehors de l'extrémité de l'aile (où les gradients sont élevés et donc mal évalués) donne un résultat similaire. Dans la mesure où l'équation (2.3) fait apparaître la fonction circulation, il est nécessaire de constituer une interpolation entre deux points de discrétisation. Ainsi, cette interpolation donne pour le premier cas :

$$\Gamma(y) \approx \Gamma(y_i) + \dot{\Gamma}(y_i)(y - y_i)$$

Alors que dans le second cas, on a :

$$\Gamma(y) \approx \Gamma(y_{b_i}) + \dot{\Gamma}(y_i)(y - y_{b_i})$$

Cette seconde approche permet, dans le cas où le sillage proche du point de collocation est composé de bandes, d'assurer la nullité de la circulation en extrémité d'aile, ce que ne permet pas la première approche. L'avantage est alors de minimiser l'erreur commise au voisinage de ce point où les gradients sont grands (et tendent vers l'infini) en s'assurant de la valeur de la circulation en $y/(b/2) = \pm 1$. Nous conserverons donc dans la suite l'expression du gradient suivante :

$$\left. \frac{d\Gamma}{dy} \right|_{y_i} \approx \frac{\Gamma(y_{b_i}) - \Gamma(y_{b_{i+1}})}{y_{b_i} - y_{b_{i+1}}} \quad (2.4)$$

2.1.3 Résultats et validations

Nous présentons ici quelques résultats significatifs dans le but de valider notre approche. En particulier, nous allons comparer les différentes stratégies de discrétisation du sillage à des cas de référence sur deux ailes différentes. Puis nous validerons les résultats obtenus en terme de circulation avec les théories existantes de ligne portante asymptotique. Ces ailes ont en commun leur loi de corde elliptique et leur paramètre d'allongement $\mathcal{R} = B/C = 10$. La première aile est inclinée par rapport au vent incident selon un angle de 45° (Fig. 2.8). La seconde est une aile de ligne moyenne parabolique d'équation $x_0(y) = 0, 2y^2$. La répartition de circulation sur cette aile calculée par une méthode de ligne portante asymptotique est disponible dans la littérature (Guermond, 1990). Ces ailes sont placées en incidence uniforme.

Les premiers résultats concernent le calcul de la vitesse induite w_0 à partir de la répartition de circulation bi-dimensionnelle Γ_0 . On peut voir sur la figure 2.8, le calcul de cette vitesse par différentes méthodes :

- les deux schémas proposés,
- la solution analytique proposée par Guermond (1990),
- le schéma classique n'utilisant que des tourbillons en fer à cheval (Fig. 2.3) de circulation Γ_0 .

À l'évidence, l'approche à trois segments sur lesquels nous considérons une variation linéaire de circulation permet de retrouver les résultats de Guermond (1990) en tous points. Nos constatations sont similaires pour l'approche à une seule nappe (Fig. 2.5). Néanmoins, on peut voir en extrémité d'aile un léger écart entre les deux approches. Celle-ci est due à une grande influence des premiers voisins dans le cas où le gradient de circulation est important, ce qui n'est pas le cas au centre de l'aile où les gradients sont faibles.

De plus, l'approche classique donne des résultats très différents y compris qualitativement. En effet, celle-ci prédit une répartition de vitesse qui varie à l'opposé des approches précédentes. Les plages de variation sont également différentes. Or cette vitesse ne fait pas apparaître de partie finie au sens d'Hadamard. Il semble bien que ce soit l'absence de ce formalisme qui provoque une divergence totale des

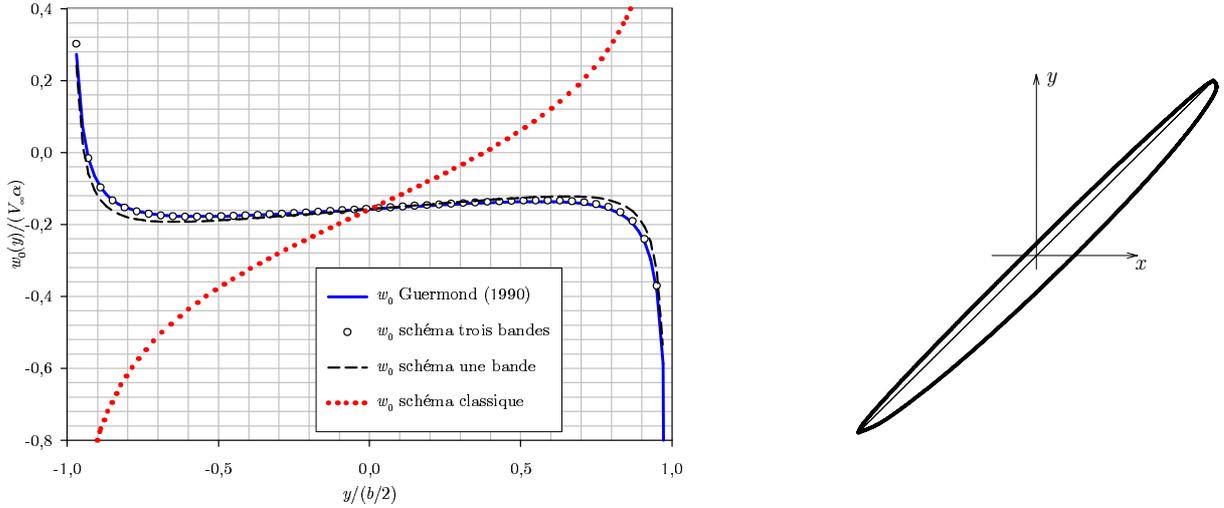


FIG. 2.8 – Vitesse w_0 induite par un sillage de circulation $\Gamma_0(y)$ par différentes méthodes

résultats. En effet, entre l’approche à une nappe et l’approche classique, seul le panneau courant (celui qui contient le point de calcul) diffère. Dans le premier cas, une intégrale en partie finie est évaluée, dans le second, une intégrale en valeur principale. Par ailleurs, dans des zones où Γ_0 varie peu¹⁸, les deux approches sont en accord car la partie finie devient une valeur principale. Ailleurs, le gradient $d\Gamma_0/dy$ prend des valeurs non négligeables, ce qui ne permet plus de considérer uniquement une intégrale en valeur principale pour évaluer convenablement w_0 .

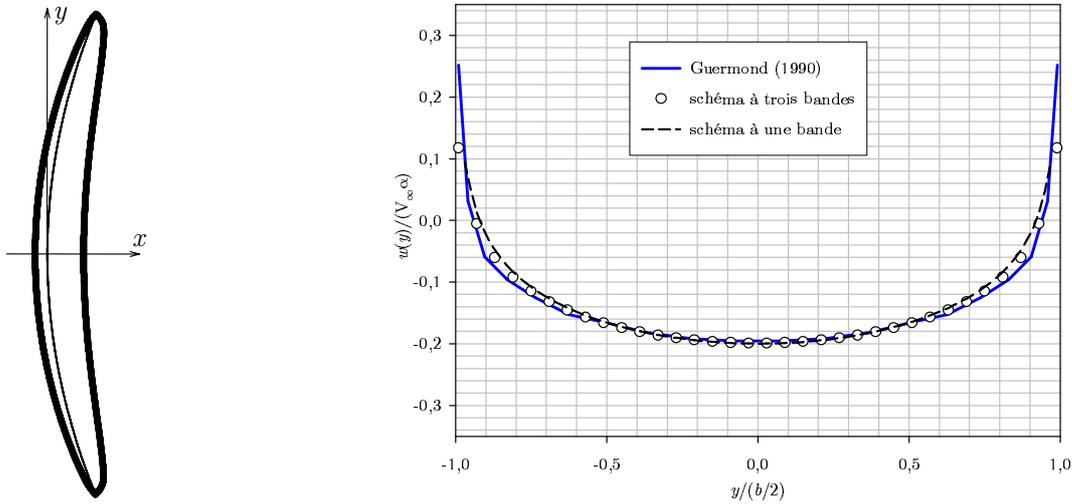


FIG. 2.9 – Incidence induite sur une aile courbe

Regardons maintenant l’évaluation de l’incidence induite sur une aile courbe par différentes méthodes (Fig. 2.9). Nous comparons ici les deux schémas proposés précédemment et le résultat proposé par Guermond (1990). Ici encore, les discrétisations proposées permettent de retrouver les résultats du

¹⁸rappelons que $\Gamma_0(y) = \pi c(y) \cos \Lambda(y)\alpha$ et que l’aile est elliptique. Ainsi, au centre de l’aile (*i.e.* $y/(b/2) \approx 0$), $d\Gamma_0/dy \approx 0$

schéma asymptotique de Guermond, avec une précision encore à l'avantage du modèle à trois bandes. Même si en décrivant l'envergure, ce dernier impose le calcul de trois fois plus d'intégrales que le schéma à une bande, la différence de temps de calcul n'est pas significative.

Les résultats sur l'incidence induite étant en accord, ils le sont bien évidemment en terme de circulation (Fig. 2.10 et Fig. 2.11). Notons que Guermond (1990) propose une expression analytique du

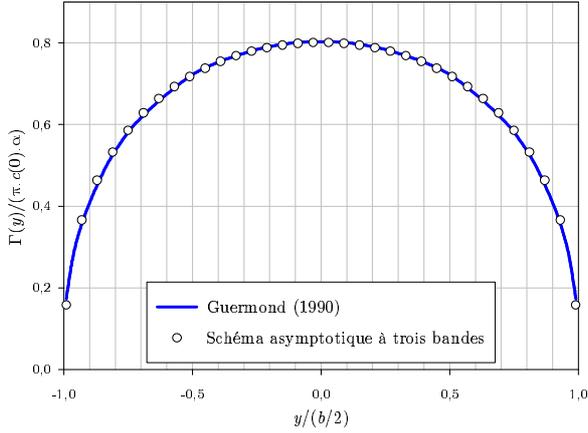


FIG. 2.10 – Circulation sur une aile courbe d'équation $x_0(y) = 0,2y^2$

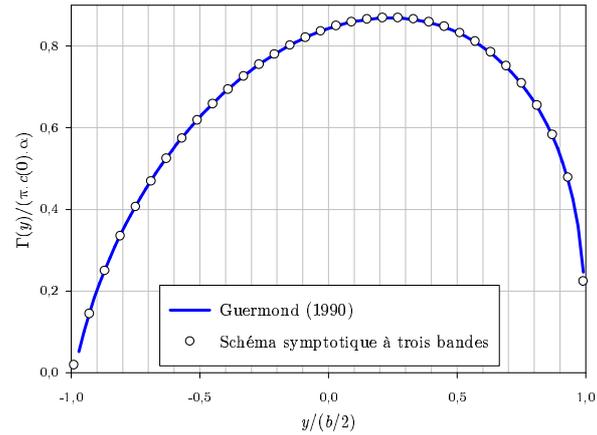


FIG. 2.11 – Circulation sur une aile droite inclinée à 45°

développement asymptotique à l'ordre un en $1/\mathcal{R}$ de la circulation pour l'aile droite placée en dérapage à un angle Λ . Ceci permet de confronter notre approche avec une solution exacte.

Les répartitions de circulation obtenues sont pleinement en accord avec les démarches asymptotiques existantes. C'est pourquoi, dans la suite, nous ne distinguerons plus ces deux approches. La convergence spatiale de notre modèle asymptotique est très rapide puisque suivant les géométries, quelques dizaines de points (≈ 20) suffisent à obtenir les résultats présentés ici. Les intégrales régulières sont calculées à l'aide d'une méthode d'ordre 2 (« trapèzes ») avec 32 points de grille. Une amélioration de l'algorithme d'intégration à l'aide d'une méthode d'ordre 4 de type Simpson ou « trapèzes corrigés » n'apporte pas de gain de précision visible. Le temps de calcul est faible : quelques secondes de calcul suffisent pour obtenir la solution à l'aide d'un PC équipé d'un processeur cadencé à 500 MHz.

2.2 Développement d'une nouvelle méthode de ligne portante

L'application de la théorie asymptotique que nous avons présentée au chapitre précédent permet, à moindre coût, de déterminer la répartition de circulation sur des ailes de forme en plan arbitraire habituellement dévolues à des méthodes de types surfaces portantes. Par ailleurs, les implémentations industrielles n'utilisent que les approches classiques de la ligne portante en discrétisant le sillage en tourbillons en fer à cheval et en résolvant le pendant discrétisé de l'équation intégro-différentielle de Prandtl (modifiée empiriquement pour prendre en compte l'effet de flèche) via un processus itératif.

Nous avons remarqué que ces deux approches sont formellement similaires, de par l'écriture des équations (1.16) et (1.2). Elles ne sont que similaires car elles ne font pas référence aux mêmes concepts. En effet, dans l'équation (1.2), $\Gamma(y)$ l'inconnue du problème, intervient dans les deux membres de l'égalité via α^* , alors que l'équation (1.16) propose une expression asymptotique de la circulation dont les différents ordres sont obtenus à partir des ordres inférieurs et en particulier de la loi de circulation bi-dimensionnelle Γ_0 .

Par conséquent, si les deux approches décrivent la répartition de circulation sur une aile d'allongement fini comme étant due à la somme d'une incidence géométrique et d'une incidence induite par le caractère tri-dimensionnel de l'écoulement, la circulation obtenue n'a pas la même signification dans les deux cas.

On peut alors être amené à considérer différemment l'écriture asymptotique proposée par Guermond (1990). En effet, ces travaux montrent que le terme tri-dimensionnel de vitesse induite renferme des termes absents du modèle de Prandtl (1923) : l'intégration en partie finie et la vitesse complémentaire w_c . D'ailleurs, dans le cas particulier d'une aile droite (traité par Prandtl), ces termes s'annulent pour obtenir une formulation semblable (mais pas identique) : celle explicitée par Van Dyke (1964). Elle ne sont que formellement semblables car la théorie originale donne une fonction circulation et non quelques termes de son développement asymptotique.

Ainsi, nous allons considérer que le terme de vitesse induite écrit par Prandtl n'est plus valable pour une aile de forme complexe. Celui-ci est par contre correctement exprimé par Guermond dans le terme w_0 dans l'équation (2.3). Ce terme est la vitesse induite par un sillage semi infini issu du tourbillon lié courbe défini par (\mathcal{L}) et dont la circulation varie en envergure selon la répartition Γ_0 .

Dans la lignée de la théorie de Prandtl, nous allons envisager cette même géométrie de sillage mais avec une répartition de circulation Γ (et non plus Γ_0) transformant du même coup la recherche du développement asymptotique de la circulation en la détermination de la fonction elle-même et le problème explicite en un problème implicite.

Par ailleurs, les effets tri-dimensionnels sont complétés par une vitesse complémentaire w_c qui tient compte explicitement et analytiquement de la flèche, de la courbure et du gradient de circulation $d\Gamma_0/dy$. Cette vitesse sera de même déterminée à l'aide de Γ et non de Γ_0 . Ainsi, la détermination de la circulation devient un problème totalement implicite à l'identique de la théorie de la ligne portante de Prandtl.

2.2.1 Équation implicite de la ligne portante

Dans l'esprit de la théorie de la ligne portante de Prandtl où, dans l'équation (1.2), $\alpha^*(y)$ est obtenue à partir de $\Gamma(y)$, notre méthode met en place une écriture implicite sur l'équation (1.16). Formellement, nous cherchons à déterminer la répartition de circulation régie par :

$$\Gamma(y) = \pi c(y) \cos \Lambda(y) (\alpha(y) + \alpha^*(y)) \quad (2.5)$$

avec :

$$\alpha^*(y) = \frac{1}{\mathcal{R}} [w_0(y) + w_c(y)]$$

et, en introduisant la variable implicite,

$$w_0(y) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(\psi)}{(y-\psi)^2} \left(1 - \frac{x_0(\psi) - x_0(y)}{\sqrt{(x_0(y) - x_0(\psi))^2 + (y-\psi)^2}} \right) d\psi \quad (2.6)$$

$$w_c(y) = \left[\frac{\Gamma(y)}{4\pi r(y)} + \sin \Lambda(y) \frac{\dot{\Gamma}(y)}{2\pi} \right] \left[\ln \left(\frac{c(y)}{4\mathcal{R}} \right) + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Gamma(y)}{4\pi r(y)} \left[1 - \tan^2 \Lambda(y) - \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda(y)} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$+ \frac{\dot{\Gamma}(y)}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin \Lambda(y)}{\cos \Lambda(y)} \right| - \sin \Lambda(y) \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda(y)} \right) \right]$$

Nous avons un temps envisagé une résolution directe de ce problème. Néanmoins, l'écriture qui en résulte est d'une rare lourdeur du fait du traitement des intégrales hypersingulières. En revanche un schéma itératif est particulièrement bien adapté à la résolution de problèmes implicites. Ainsi, à la convergence, le calcul de $w(y)$ est réalisé non plus avec Γ_0 mais avec Γ .

2.2.2 Mise en place de la résolution itérative

On adopte la même discrétisation de la ligne portante et de la fonction circulation que celle retenue au chapitre 2.1. Cette discrétisation est compatible avec les applications de la ligne portante de Prandtl et nous permet de mettre en œuvre des outils identiques pour notre ligne portante. On obtient alors l'approximation suivante pour w_0 :

$$w_0(y_i) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i-1, i, i+1}}^N w_{FaC}(S_j \rightarrow y_i) + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} \frac{\Gamma(\psi)}{(\psi - y_i)^2} \left(1 - \frac{x_0(\psi) - x_0(y_i)}{\sqrt{(x_0(\psi) - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2}} \right) d\psi \quad (2.8)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_{i-1} \cup S_{i+1}} \frac{\Gamma(\psi)}{(\psi - y_i)^2} \left(1 - \frac{x_0(\psi) - x_0(y_i)}{\sqrt{(x_0(\psi) - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2}} \right) d\psi$$

De même, pour le terme complémentaire :

$$w_c(y_i) = \left[\frac{\Gamma(y_i)}{4\pi r(y_i)} + \sin \Lambda(y_i) \frac{\dot{\Gamma}(y_i)}{2\pi} \right] \left[\ln \left(\frac{c(y_i)}{4\mathcal{R}} \right) + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Gamma(y_i)}{4\pi r(y_i)} \left[1 - \tan^2 \Lambda(y_i) - \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda(y_i)} \right) \right] + \frac{\dot{\Gamma}(y_i)}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin \Lambda(y_i)}{\cos \Lambda(y_i)} \right| - \sin \Lambda(y_i) \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda(y_i)} \right) \right] \quad (2.9)$$

Le problème est de déterminer le gradient de circulation comme nous l'avons envisagé au chapitre 2.1.2. En effet, dans la théorie asymptotique, la circulation est connue au bord des nappes *i.e.* au point (y_{b_i}) puisque la loi Γ_0 est analytique ce qui n'est plus le cas lors des itérations : Γ n'est connue que ponctuellement.

Pour contourner cet inconvénient, il nous a semblé plus cohérent de reconstruire la valeur de la circulation en $(y_{b_i})_{i \in [2, n-1]}$ à chaque itération par interpolations successives plutôt que de modifier totalement la mise en place du sillage exposée au 2.1.1.

- La valeur de la circulation est connue en $(y_i)_{i \in [1, n]}$ et aux extrémités de la ligne portante :

$$\Gamma(y_{b_1}) = \Gamma(y_{b_{n+1}}) = 0$$

- l'interpolation retenue consiste à déterminer $n - 1$ séries trigonométriques de type Glauert-Carafoli, construites à l'aide des deux voisins du point y_{b_i} *i.e.* sur le segment :

$$\left[(y_{i-1}, \Gamma(y_{i-1})), (y_i, \Gamma(y_i)) \right]$$

- la valeur au point milieu peut alors être déterminée et le gradient calculé (Fig. 2.12).

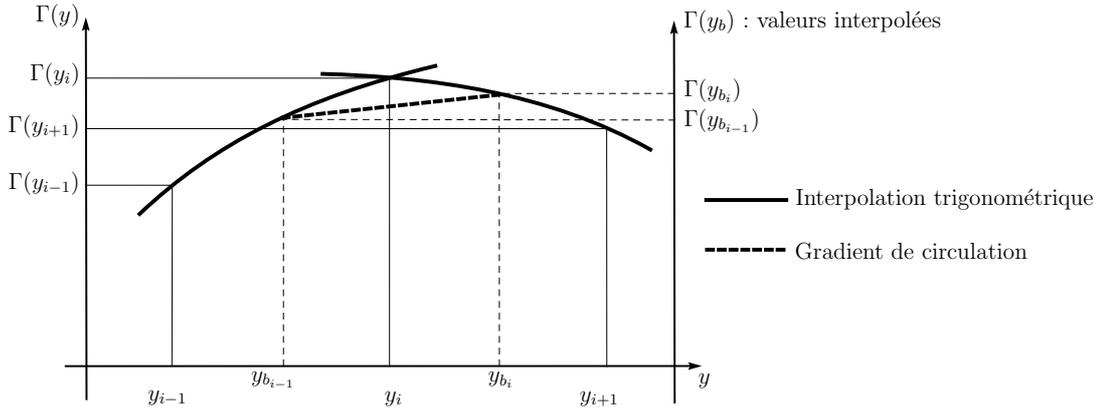


FIG. 2.12 – Reconstruction de la valeur de Γ en (y_{b_i}) et évaluation du gradient

Les intégrations numériques d'intégrales régulières ou hypersingulières sont réalisées à l'aide des mêmes algorithmes que ceux utilisés dans notre implémentation de la ligne portante asymptotique. Ainsi, à chaque itération, la solution est déterminée en calculant $w(y)$ grâce à (2.8) et (2.9).

Nous nous sommes néanmoins heurtés à un problème au cours des itérations. A l'extrémité de la ligne portante, le gradient de circulation varie non seulement rapidement mais peut, de plus, tendre vers l'infini. Il est donc illusoire d'espérer une bonne prédiction numérique de la vitesse induite dans ces zones. Numériquement des oscillations prennent naissance au voisinage de l'extrémité et les deux premiers et derniers points de calcul sont erronés.

La solution retenue est de régulariser à chaque itération les valeurs de la circulation dans ces zones à l'aide de deux interpolations trigonométriques de type Glauert-Caraffoli construites sur trois points : le point d'extrémité de la ligne portante (où la circulation est nulle) et les deux premiers voisins de la zone incriminée. Ces méthodes donnent de bons résultats et permettent de minimiser l'erreur introduite par notre approximation du gradient aux extrémités de l'aile.

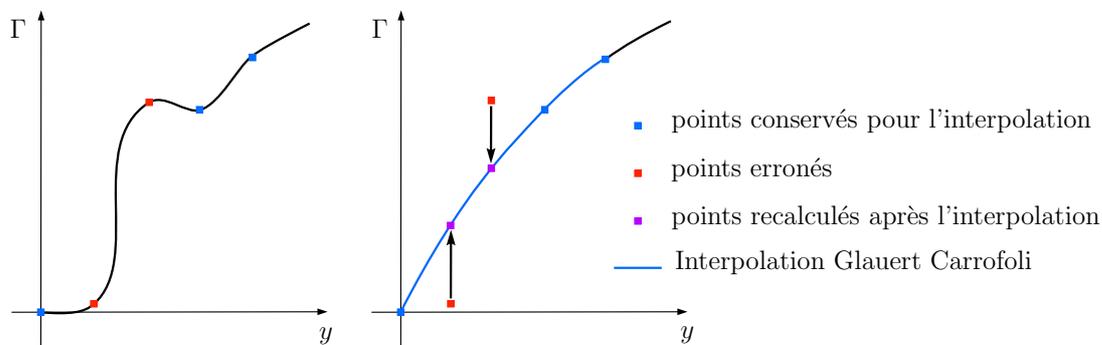


FIG. 2.13 – Régularisation en bout d'aile par interpolation trigonométrique

Il est à noter que cette dispersion des résultats en bout d'aile n'intervient que lorsque la discrétisation est très fine (≈ 100 points). Pour des applications usuelles où quelques dizaines de points suffisent, cette dispersion est relativement rare du fait de la plus faible valeur du gradient de circulation au premier point de calcul. Cette procédure de régularisation est alors inutile.

2.2.3 Le problème de l'aile en flèche

Au sens aéronautique du terme, une aile en flèche est composée de deux portions rectilignes symétriques par rapport au plan vertical passant par le centre de l'aile. Ces ailes en « V » peuvent être en flèche arrière (c'est le cas le plus courant) ou en flèche avant (on parle également de flèche inversée). Certains des auteurs les plus intéressés par le concept de ligne portante ont tenté de l'appliquer à une aile en flèche. Ainsi, Cheng et Meng (1980) présentent une aile en flèche dont l'apex est occulté. D'après ceux-ci, la cassure possède un caractère singulier qui requiert un traitement particulier. En écoulement stationnaire, Prössdorf et Tordella (1991) utilisent le théorème de Pistolesi pour transformer la formulation intégral-différentielle de Prandtl en formulation de type Weissinger. Cette dernière s'appliquant à des

ails brisés, ces auteurs estiment que la répartition de circulation obtenue par la méthode de Weissinger est identique à celle que l'on obtiendrait par la ligne portante.

Sans prendre de précautions particulières, il n'est pas envisageable d'appliquer une théorie de la ligne portante au voisinage d'une cassure. Comme nous le rappelons au chapitre 1.3.2, les lois de flèche et de courbure se doivent d'être continues, ce qui n'est pas le cas pour une aile ayant une rupture brusque.

Une solution envisageable est de considérer l'aile en flèche sous l'angle de l'aile courbe. On peut en effet envisager d'arrondir la cassure de manière à obtenir une aile composée de deux segments inclinés symétriquement et d'une portion courbe pour figurer la pointe. La principale condition à respecter est la continuité de la fonction $r(y)$ sur toute l'envergure. En particulier, la courbure (resp. le rayon de courbure) doit être nulle (resp. infini) aux deux points de raccordement. Par ailleurs, le rayon de courbure du raccord envisagé doit être de l'ordre de l'unité afin de satisfaire les hypothèses de la théorie asymptotique.

Plusieurs approches ont été envisagées. La première utilise des fonctions splines cubiques qui, par construction, sont des fonctions localement de classe \mathcal{C}^∞ et globalement de classe \mathcal{C}^2 . Par ailleurs, ces splines d'interpolation sont construits sur la valeur de la dérivée seconde de la fonction à interpoler aux points de raccordement. Sachant que le rayon de courbure est déterminé par :

$$r(y) = \frac{\left(1 + (\dot{x}_0(y))^2\right)^{3/2}}{\ddot{x}_0(y)}$$

la condition sur la valeur du rayon de courbure est automatique. Cette approche simple pour une vraie flèche symétrique ne l'est plus pour une aile brisée non symétrique comme les pales de rotors d'hélicoptères peuvent l'être.

Une autre approche consiste à utiliser des fonctions trigonométriques, en particulier la fonction cosinus entre $[-\pi/2, \pi/2]$. Celle-ci possède la propriété avantageuse de posséder deux points d'inflexion en $-\pi/2$ et $\pi/2$. En introduisant une homothétie pour assurer la valeur de la tangente en un point de raccordement, puis un changement de variable pour positionner la branche cosinusale sur la seconde tangente, il est alors simple de construire un raccord sur une cassure brusque.

Ainsi, la figure 2.14 montre formellement comment on raccorde deux segments de pente α_1 et α_2 à l'aide d'une branche de cosinus. L'avantage de cette formule est de pouvoir raccorder en ayant un degré de liberté : la longueur de la zone raccordée : $|y_{max} - y_{min}|$. Le raccord peut, de plus, ne pas être symétrique par rapport à la pointe. Comme nous le verrons dans la suite, cette approche permet d'obtenir des résultats intéressants pour des ailes présentant des cassures.

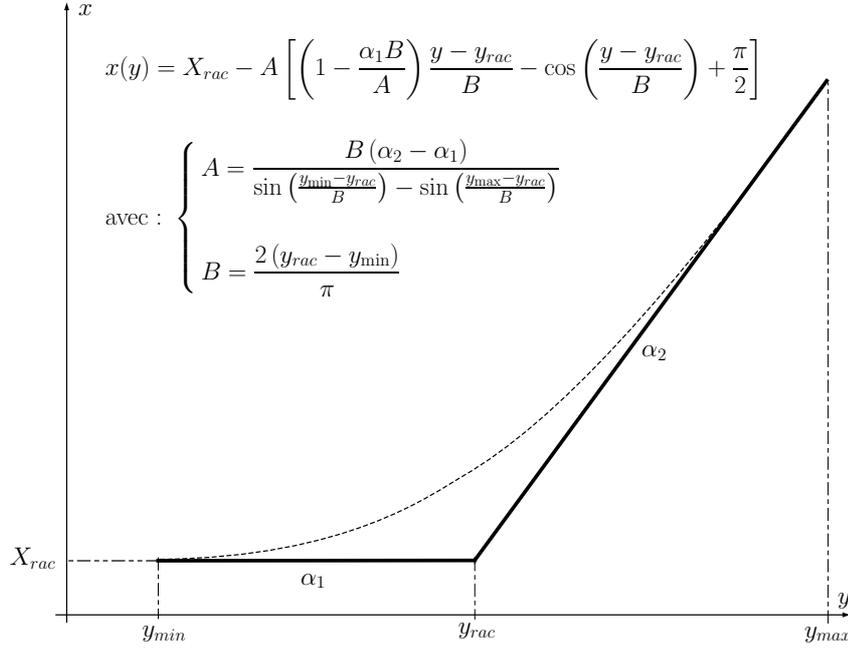


FIG. 2.14 – Le raccord trigonométrique d’une aile brisée

2.2.4 Résultats et validations

La résolution numérique d’un problème par un algorithme itératif nécessite une valeur initiale. On pourrait prendre la valeur initiale nulle pour débiter le calcul. Dans, notre cas, prendre cette condition initiale pour Γ revient, d’après (2.5), à considérer qu’à l’issue de la première itération, $\Gamma(y) = \pi c(y) \cos \Lambda(y) \alpha$. Par conséquent, à l’issue de la deuxième itération, la solution obtenue est la répartition de circulation prédite par la théorie asymptotique. Ainsi, cette approche permet à la fois d’obtenir la solution asymptotique et, à convergence, la solution de notre méthode issue de la théorie classique, tout en supprimant la première itération dont la solution est connue.

Le processus itératif est interrompu lorsqu’un test de convergence, entre deux itérations successives, satisfait à la précision voulue. Il s’est par ailleurs révélé nécessaire d’introduire une procédure de relaxation durant le processus itératif. Cette procédure numérique classique consiste à ne considérer qu’une partie de la solution nouvellement calculée, le complémentaire étant dû à l’itération précédente. Si on note $\Gamma_i^{(k)}$ et $\Gamma_i^{(k+1)}$ les valeurs de $\Gamma(y_i)$ aux itérations k et $k + 1$ et ρ le coefficient de relaxation ($\rho \in [0, 1]$), la procédure de relaxation consiste à écrire, d’après (2.5),

$$\Gamma_i^{(k+1)} = \rho \Gamma_i^{(k)} + (1 - \rho) \pi c(y_i) \cos(\Lambda_i) [\alpha(y_i) + \alpha^*(y_i)]$$

où $\alpha^*(y_i)$ est déterminé à l’aide de la valeur $\Gamma_i^{(k)}$.

La validation a été réalisée à l’aide d’une méthode potentielle courante en mécanique des fluides

parfaits. Il s'agit d'une méthode surface mince portante classique de type Vortex-Lattice Method (VLM) (Leroy, 1997). L'aile est modélisée par une série de panneaux positionnés en corde et en envergure. En théorie linéarisée stationnaire, on considère que sur chaque panneau est positionné un tourbillon en fer à cheval dont le segment lié se situe au quart avant de la dalle et un point de contrôle (C) au quart arrière de celle-ci (Fig. 2.15). Le sillage est donc constitué d'une superposition de tourbillons semi infinis s'étendant du bord de fuite jusqu'à l'infini aval.

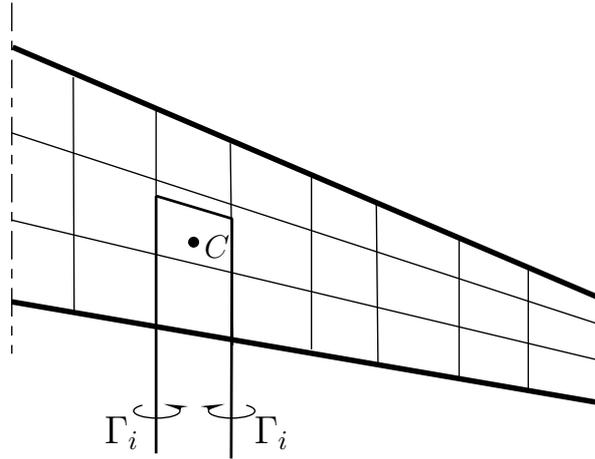


FIG. 2.15 – Principe de la méthode VLM

L'intensité de ces tourbillons en fer à cheval est déterminée en appliquant la condition de glissement au point de contrôle. Ainsi, pour une aile mince en incidence α , si w_i est la vitesse induite en un point de contrôle i par l'ensemble du système tourbillonnaire, la condition s'écrit : $V_\infty \cdot \sin(\alpha) + w_i = 0$ et w_i s'exprime à l'aide de la matrice d'influence A_{ij} des tourbillons j au point de contrôle i :

$$w_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \Gamma_j$$

On obtient alors un système de N équations linéaires dont les N inconnues que sont les Γ_j , à résoudre par un algorithme de pivot ou itérativement. L'avantage de cette méthode est qu'elle est applicable quelle que soit la forme en plan de l'aile qui est généralement symétrique. Une refonte partielle du code existant fût nécessaire pour l'employer sur des ailes non symétriques (en dérapage par exemple).

Les ailes utilisées pour ces validations sont celles que nous avons décrites au chapitre précédent (Fig. 2.8 et Fig. 2.9). Elles sont toujours placées en incidence uniforme. Nous comparons tout d'abord la vitesse w_0 par différentes approches :

- l'approche asymptotique,
- l'application classique de la ligne portante de Prandtl,

– notre approche asymptotique implicite.

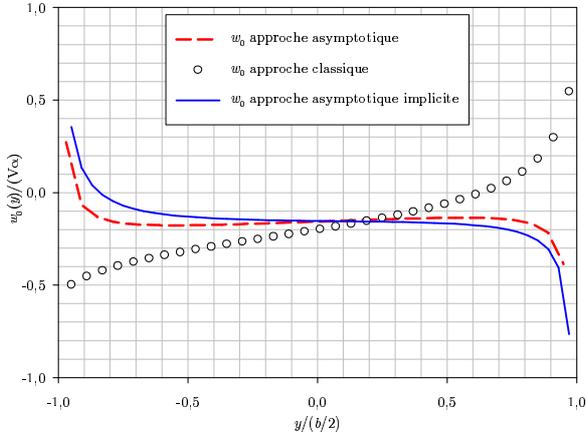


FIG. 2.16 – Répartitions de vitesse induite sur une aile en dérapage à 45°

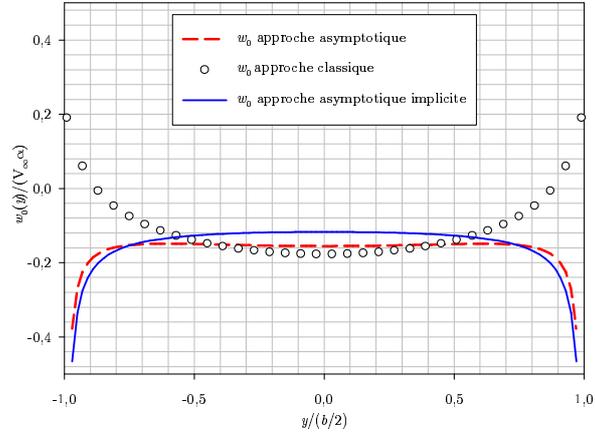


FIG. 2.17 – Répartitions de vitesse induite sur une aile courbe

Sur une aile en dérapage, la vitesse induite w_0 par la ligne portante sur elle-même, calculée à l'issue du processus itératif, varie de façon similaire à celle calculée par l'approche asymptotique. Elles diffèrent néanmoins sensiblement en valeur. Bien que conceptuellement identiques, les deux lignes portantes de type Prandtl ne donnent pas des vitesses similaires, ce qui montre l'apport du calcul en partie finie et l'ajout des termes complémentaires w_c .

Pour l'aile courbe, les conclusions sont similaires. On peut également ajouter que la vitesse déterminée par l'approche asymptotique varie assez peu sur une large plage centrale d'envergure alors que notre approche propose une variation plus importante. Qualitativement, ces deux vitesses sont semblables et très différentes de ce que donne la ligne portante classique. Nous nous attendons évidemment à retrouver ces différences en terme de circulation.

Avant de considérer la circulation sur ces ailes, il convient d'effectuer une vérification. La figure 2.18 montre la répartition de circulation sur une aile droite placée perpendiculairement au vent incident. Celle-ci permet de comparer les deux démarches (asymptotique et implicite) avec la solution analytique au problème de Prandtl donnée par l'équation (1.4). Bien que très proches, seule l'approche implicite permet de retrouver la solution exacte donnée par Glauert et Carafoli. Ceci est relativement logique : lorsqu'il s'agit d'une aile droite face au vent, l'équation (1.16) voit certains termes s'annuler (c'est le cas de w_c donnée par (1.17)) ou bien se simplifier considérablement (notamment w_0 donnée par (1.15)). L'équation (1.16) se réduit alors à celle proposée par Van Dyke (1.13). Pour notre processus itératif, résoudre cette équation de manière itérative revient exactement à résoudre l'équation intégralo-différentielle (1.3) et permet de retrouver la solution analytique pour l'aile droite face au vent.

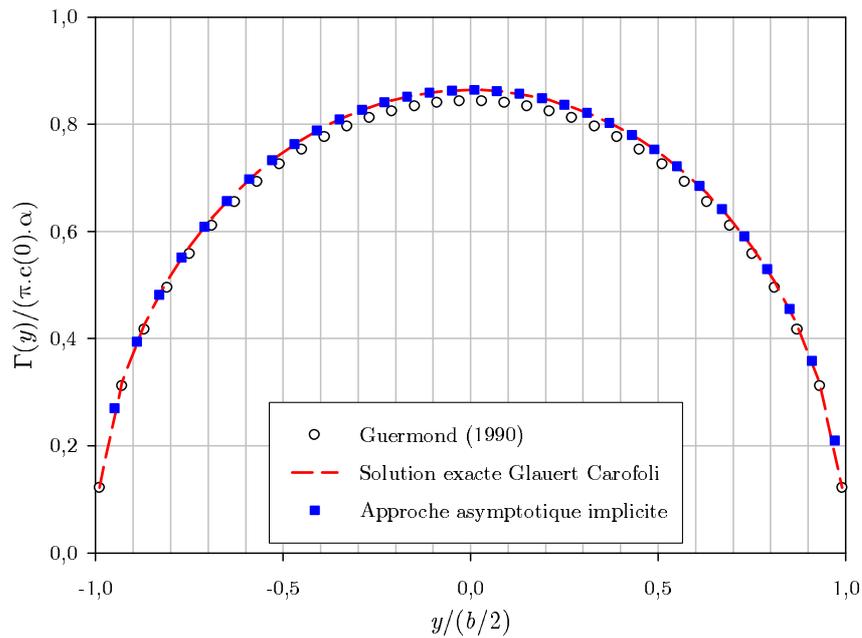
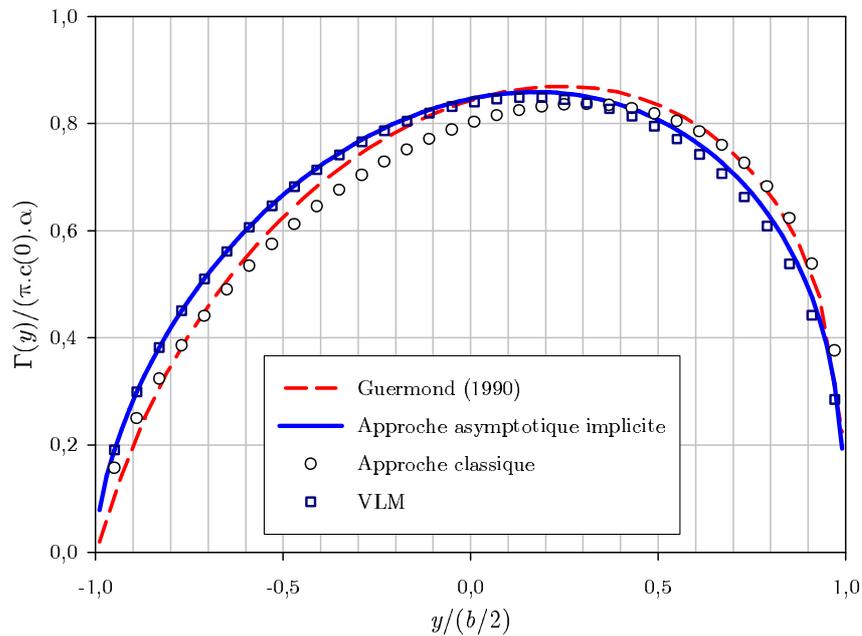


FIG. 2.18 – Répartitions de circulation sur une aile elliptique droite face au vent

FIG. 2.19 – Répartitions de circulation sur une aile en dérapage à 45°

Pour l'aile en dérapage (Fig. 2.19), n'ayant aucune possibilité d'avoir une solution de référence avec la ligne portante de Prandtl, nous comparons les différentes approches au schéma VLM convergé exposé ci-dessus. L'approche classique confirme ses lacunes, alors que l'approche asymptotique révèle aussi un

comportement assez éloigné de la solution de type surface portante. À l'évidence, notre approche issue de la théorie classique avec prise en compte rigoureuse de la flèche permet d'obtenir des résultats proches des méthodes VLM, même lorsque l'angle de dérapage est important (45° dans notre cas).

Pour l'aile courbe, l'effet de la non prise en compte de la courbure par la théorie classique est visible (Fig. 2.20). Le comportement de notre approche itérative est encore en accord avec le résultat VLM ce qui constitue une bonne amélioration de la théorie classique. On remarque en effet qu'au centre de l'aile, lorsque la flèche et la courbure sont faibles, ces deux approches sont comparables. Dès que l'on s'écarte de cette zone, l'influence de la courbure et de la flèche augmente et les résultats s'éloignent sensiblement.

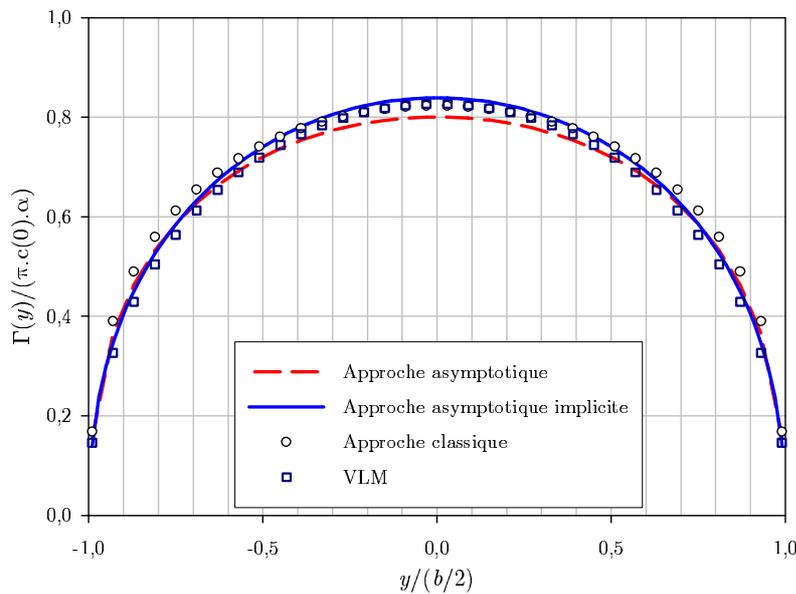


FIG. 2.20 – Répartitions de circulation sur une aile courbe d'équation $x_0(y) = 0,2y^2$

Nous avons également considéré une aile en flèche comme décrite au chapitre précédent. La flèche considérée est de 30° et le raccord s'étend sur $|y_{max} - y_{min}| = 2b/100$, il est donc très peu étendu en envergure. Ce cas nous permet d'illustrer le cas limite d'un raccord très concentré et d'une flèche élevée.

La figure 2.23 illustre une des limitations de la théorie asymptotique. On peut en effet remarquer (Fig. 2.22) que la courbure n'est plus de l'ordre de l'unité ce qui empêche l'approche asymptotique de donner un résultat correct. Notre approche itérative donne une répartition de circulation globalement en accord avec la méthode VLM. La faible étendue du raccord a une grande influence et augmente l'erreur au voisinage de la pointe. Néanmoins, notre méthode itérative donne les résultats les moins éloignés de ceux de notre méthode de référence, ce qui permet d'envisager des applications pour des ailes moins fortement brisées ou présentant un raccord plus étendu.

Ce dernier point est par ailleurs illustré par le résultat suivant. Lorsque le rayon de courbure satisfait

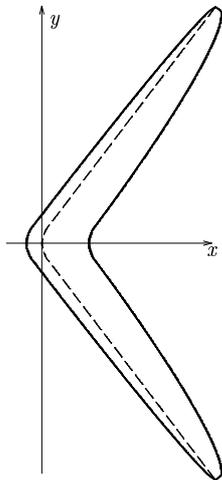


FIG. 2.21 – L'aile en flèche à 30°

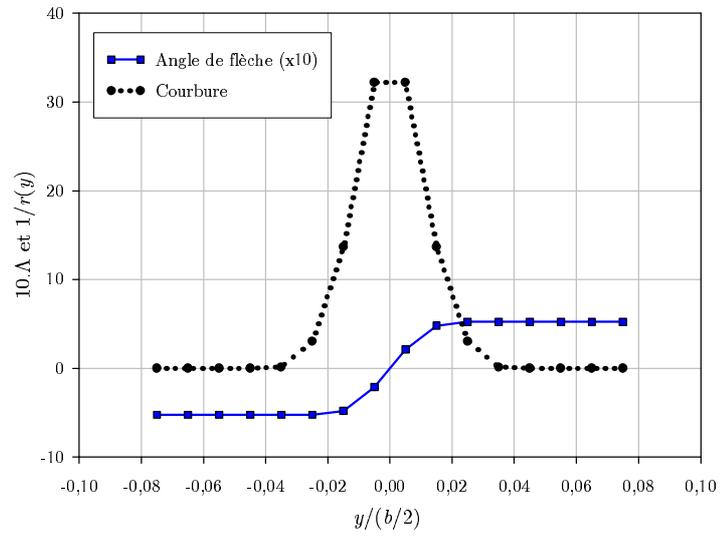


FIG. 2.22 – Flèche et courbure au voisinage du raccord

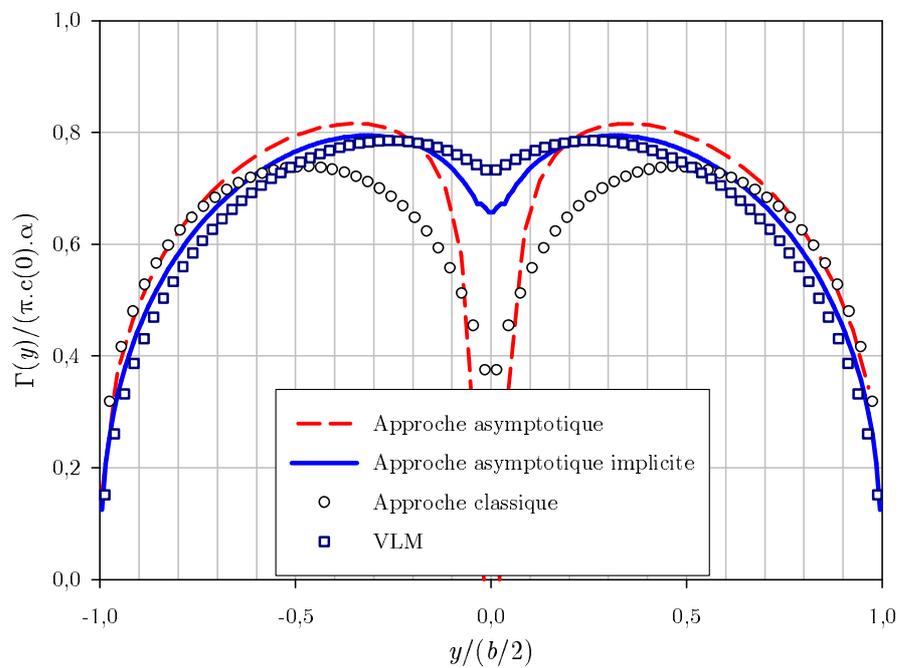


FIG. 2.23 – Répartitions de circulation sur une aile en flèche à 30°

les conditions d'ordre de grandeurs (comme dans le cas des ailes fortement courbées), les résultats obtenus sont satisfaisants. Comme le montre la figure 2.24, nous avons appliqué ces mêmes approches au cas d'une aile parabolique dont la flèche en extrémité de voilure atteint 63° , mais dont le rayon de courbure demeure proche de l'unité. Il est rare de trouver dans la littérature des ailes aussi fortement courbées ou en fort dérapage alors que de telles configurations aéronautiques, sans être courantes, existent.

On remarque, dans le cas de la forte courbure, que seule notre approche de la ligne portante obtient un accord convenable avec les méthodes de type VLM. Qu'elles soient asymptotiques ou classiques, les méthodes de lignes portantes usuelles ne peuvent obtenir de résultats satisfaisants pour des ailes de forte courbure ; allant même jusqu'à prédire une chute de circulation au centre de l'aile, ce que ne prévoient ni les méthodes potentielles plus complexes ni notre approche. La figure 2.24 montre à elle seule l'intérêt de notre approche.

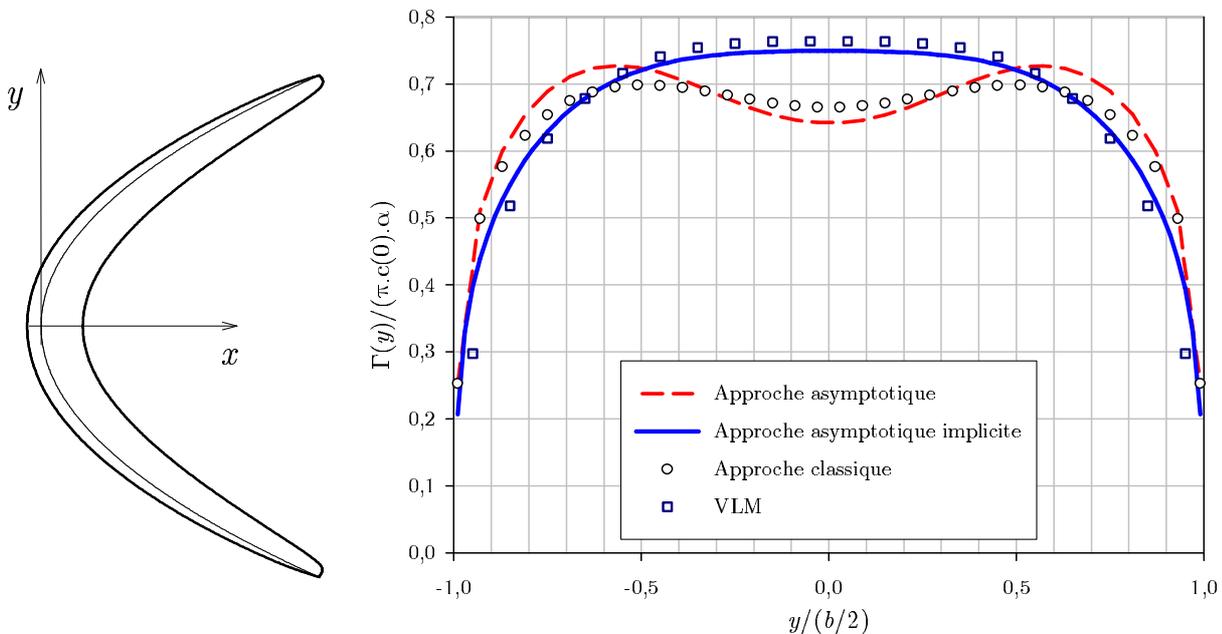


FIG. 2.24 – Répartitions de circulation sur une aile courbe d'équation $x_0(y) = y^2$

En effet, si on considère que la méthode VLM constitue la référence, il est assez logique que l'approche classique échoue, de par sa rusticité, à prédire une répartition de circulation conforme à cette référence. Le point le plus étonnant est la répartition de circulation donnée par l'approche asymptotique. Celle-ci, malgré la prise en compte exacte de l'effet de flèche et de courbure, ne permet pas de retrouver le résultat de référence pour des ailes fortement courbées. Par conséquent, si notre méthode présente des résultats conformes à ceux que prévoit la méthode VLM, c'est évidemment grâce à la prise en compte rigoureuse de la flèche et de la courbure (Guermond, 1990), mais également à la formulation implicite du

problème telle que nous l'avons exprimée.

2.2.5 Une ligne portante classique étendue

Cette étude a permis de montrer que l'approche classique de ligne portante de Prandtl pouvait être étendue au cas des ailes courbes et en dérapage. Cette approche étendue montre un comportement en accord constant avec des méthodes de type surface portante. Les temps de calcul nécessaires à notre approche sont certes supérieurs à ceux engendrés par les méthodes asymptotiques, mais restent faibles et totalement compatibles avec une mise en œuvre pratique car du même ordre que les temps de calcul requis par les approches classiques.

Les résultats sur des ailes en très forte flèche sont également de bonne qualité même si le respect des hypothèses initiales demeure un point important avant la mise en œuvre pratique. Les ailes de faible flèche sont tout-à-fait aptes à être calculées par notre méthode.

Ces résultats ont semblé apporter suffisamment d'éléments nouveaux pour que l'ONERA nous propose d'envisager l'introduction de cette démarche pour des calculs sur des pales d'hélicoptères de formes complexes. Bien que ne prenant pas en compte l'intégralité des phénomènes existants au voisinage d'un rotor d'hélicoptère, cette application permet d'illustrer encore notre approche sur des géométries moins usuelles et d'étudier pour cet organisme l'effet de la flèche et de la courbure des pales d'hélicoptères.

2.3 Application - Calculs sur pales d'hélicoptère

Comme nous l'avons déjà mentionné, une des motivations de ce travail réside dans les travaux antérieurs menés en collaboration avec l'ONERA. Ceux-ci visent à améliorer la prédiction numérique des performances de rotors d'hélicoptères, non par la résolution des équations de Navier-Stokes, mais par des approches plus rapides. Celles-ci font apparaître des méthodes potentielles telles que la ligne portante.

La mise au point de rotors d'hélicoptères est aujourd'hui motivée par des considérations environnementales. En effet, de par leurs natures, les performances des hélicoptères sont bornées par les phénomènes transsoniques en pales avançantes et de décrochage en pales reculantes. Par contre, le milieu urbain dans lequel est amené à évoluer cet engin impose un certain nombre de contraintes. Ainsi, depuis longtemps, les concepteurs cherchent à réduire sensiblement les nuisances sonores dues à leurs appareils.

Une source importante de bruit est le rotor principal et l'interaction pale-sillage. De nombreuses études sont menées sur des formes complexes de pales. Pour prévoir de façon fiable ce bruit, une connaissance précise de la forme du sillage et de son intensité est nécessaire. Les outils classiques utilisant la ligne portante étant pris en défaut lors de la prise en compte de la flèche et, éventuellement, de la courbure, la prédiction des performances est erronée.

On trouve souvent la ligne portante pour des ailes en rotation (hélices, rotors, éoliennes...). L'utilisation de polaires expérimentales de profils est alors courante pour prendre en compte les effets de fluide réel. Les démarches ont globalement le même principe algorithmique : connaissant une valeur du coefficient de portance local (par un jeu de conditions initiales par exemple), on détermine une première répartition de circulation. Celle-ci permet une description tourbillonnaire du sillage qui conduit alors à une vitesse induite sur la pale puis à une incidence induite et finalement à une incidence effective. La lecture des polaires de profils donne alors une nouvelle valeur du coefficient de portance. A l'issue d'un processus itératif sur un des paramètres, on connaît tous les paramètres (circulation, portance, vitesse induite...).

Les outils classiques de prévision des performances des rotors d'hélicoptères s'appuient directement sur la théorie stationnaire de Prandtl en décrivant le sillage par un réseau hélicoïdal de lanières tourbillonnaires figées ou mises en équilibre. Ainsi, le code METAR¹⁹ (Toulmay, 1986), utilisé par l'ONERA et Eurocopter et dont nous présenterons certains résultats, intègre une implémentation quasi-stationnaire de la ligne portante de Prandtl et un sillage hélicoïdal figé. Ce code donne de bons résultats pour des cas de vol stabilisé à grande vitesse où le sillage est convecté rapidement à l'aval de la pale, ce qui permet de négliger l'influence de l'enroulement. Le schéma algorithmique est sensiblement identique à celui exposé

¹⁹Modèle d'Étude Théorique de L'Aérodynamique du Rotot

ci-dessus avec, lors de la lecture des polaires de profils, la prise en compte des effets de Mach.

C'est pourquoi, au vu des résultats précédents et de la relative rusticité des méthodes de ligne portante utilisées, l'ONERA nous a demandé de comparer notre approche ligne portante avec la méthode ligne portante classique (telle qu'elle est utilisée) et à des résultats issus d'un code de calcul de performance qui prend en compte les effets de profils réels et donc de viscosité, de compressibilité... (Contrat ONERA - Université d'Orléans réf : 14036-DA-CDES, Devinant et Gallois, 2001)

Nous avons considéré une seule pale en rotation autour de l'axe rotor. Nous exposons dans la suite le détail de l'implémentation et quelques-uns des résultats que nous avons obtenus.

2.3.1 Modélisation d'une pale

Ce travail vise non pas à étudier le problème réel de la pale d'hélicoptère mais à explorer les possibilités de l'approche ligne portante implicite. La méthode présentée précédemment n'est pas immédiatement transposable au cas de l'aile en rotation et nous précisons dans la suite comment nous sommes passés d'une configuration « réelle » de pale en rotation à une configuration de type « aile en flèche » et exposons les approximations qui ont été faites pour adapter notre méthode à cette configuration particulière.

Nous considérons une pale rigide en rotation autour de son axe et placée dans un écoulement uniforme à V_∞ . Cette pale est articulée sur le pied de pale au mât rotor. Ces différentes articulations permettent la définition de la position de la pale à différents azimuts.

Géométries des pales

Une pale est définie par les grandeurs suivantes :

- son rayon R [m] i.e. la distance radiale entre l'axe de rotation et l'extrémité de pale,
- le rayon R_{dpp} [m] de début de partie profilée,
- le taux de vrillage géométrique τ_v [deg/rayon], qui permet de déduire le vrillage géométrique θ_v [deg] (< 0) d'une section de pale de rayon r [m] à l'aide de la formule simple suivante :

$$\theta_v(r) = \tau_v \left(\frac{r - R_{dpp}}{R} \right)$$

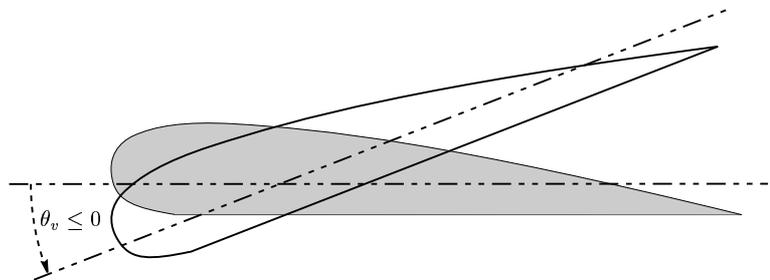


FIG. 2.25 – Vrillage d'une section de pale

- l'évolution en fonction du rayon r [m] des grandeurs suivantes : la corde c [m] et le déport ac [m] de l'axe 1/4 de corde de la pale par rapport à l'axe de pas (Fig. 2.26).

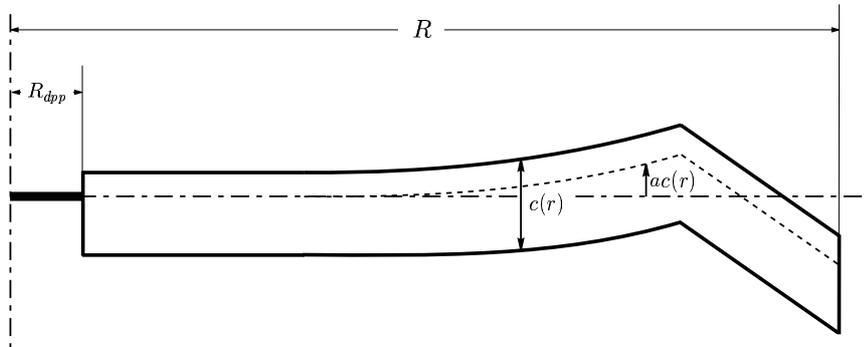


FIG. 2.26 – Définitions de la corde et de la ligne 1/4 de corde de la pale

Trois géométries de pales ont été considérées. La plus simple est la pale 7a, une pale rectangulaire. La ligne portante est donc un segment : $x_0(y) = 0$.



FIG. 2.27 – Pale 7a

La pale 7ad est identique à 7a mais son extrémité est parabolique à partir de $0,94R$. Or si la dérivée seconde \ddot{x}_0 est nulle pour la partie rectiligne, elle ne l'est plus pour la partie parabolique et introduit une discontinuité de cette dérivée. Néanmoins, en assurant que le raccord a lieu au sommet de la parabole et compte-tenu du fait que les dérivées sont calculées avec un schéma aux différences finies d'ordre 2, la discontinuité est suffisamment « lissée » pour que ce saut n'empêche pas le calcul.



FIG. 2.28 – Pale 7ad

La dernière pale, la pale Erato, est constituée de trois segments rectilignes et nécessite la mise en place de deux raccords comme décrit figure 2.14, page 48, avec : $|y_{\max} - y_{\min}| = 0,04b$. Ainsi, on peut obtenir une équation pour la ligne portante de classe \mathcal{C}^2 .

Conditions de vol

Il n'est pas évident de rendre compte de l'ensemble du domaine de vol d'un hélicoptère. Réaliser des calculs dans tout ce domaine n'est pas l'objet de cette application. De plus, c'est la faisabilité d'un

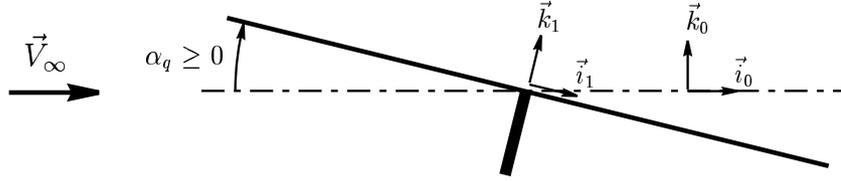


FIG. 2.29 – Pale Erato

calcul de répartitions de circulation sur une pale courbe par une méthode de ligne portante qui nous importe.

C'est pourquoi les conditions de vol sont celles d'un vol d'avancement stabilisé à savoir, que nous avons défini :

- la vitesse d'avancement V_∞ [m/s] de l'appareil (environ 35 m/s),
- le basculement α_q du mât rotor, positif vers l'arrière (Fig. 2.30),

FIG. 2.30 – Définition du basculement α_q

- le régime de rotation Ω [rd/s] du rotor (près de 100 rd/s),
- le pas des pales θ [deg] qui dépend de l'azimut Ψ [deg] de la pale ; cette incidence géométrique, qui s'ajoute au vrillage est définie par trois angles, le pas collectif θ_0 , les pas cycliques latéral et longitudinal θ_{1c} et θ_{1s} à l'aide de la formule :

$$\theta(\psi) = \theta_0 + \theta_{1c} \cdot \cos \Psi + \theta_{1s} \cdot \sin \Psi \quad (2.10)$$

L'angle $\Psi = \Omega t$ repère la position angulaire de la pale (Fig. 2.31) et par conséquent la position du repère tournant $(\vec{i}_R, \vec{j}_R, \vec{k}_R)$.

Grâce à ces définitions, il est possible de déterminer la vitesse, par rapport à l'air, d'une section de pale définie par sa distance r à l'axe de rotation, dans le repère rotor tournant $(\vec{i}_R, \vec{j}_R, \vec{k}_R)$:

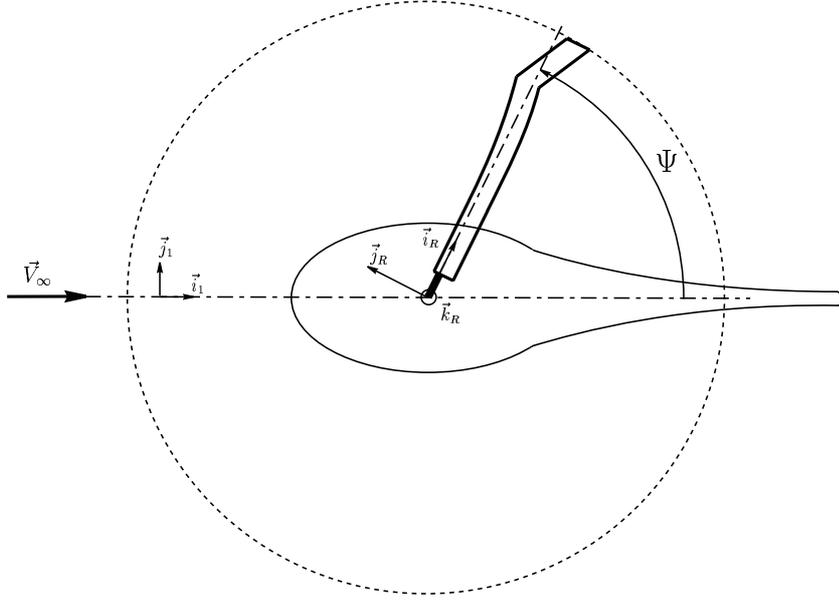
$$\vec{V}_{\text{section/air}}(r) = r\Omega \cdot \vec{j}_R - \vec{V}_\infty$$

or :

$$\vec{V}_\infty = V_\infty \vec{i}_0 = V_\infty \cos \alpha_q \left(\cos \Psi \vec{i}_R - \sin \Psi \vec{j}_R \right) + V_\infty \sin \alpha_q \vec{k}_R$$

d'où la décomposition dans le repère tournant :

$$\vec{V}_{\text{section/air}}(r) = \begin{pmatrix} V_1 = -V_\infty \cos \alpha_q \cos \Psi \\ V_2 = r\Omega + V_\infty \cos \alpha_q \sin \Psi \\ V_3 = -V_\infty \sin \alpha_q \end{pmatrix}_{(\vec{i}_R, \vec{j}_R, \vec{k}_R)} \quad (2.11)$$

FIG. 2.31 – Définition de l'azimut Ψ

Cette décomposition permet de définir l'angle de flèche aérodynamique par composition de la vitesse de rotation du rotor et de la vitesse d'avancement. Cet angle est celui que fait la normale à l'axe de pas avec la vitesse de l'air vue par une section donnée (Fig. 2.32). Ainsi :

$$\begin{aligned}\Lambda(r) &= \arctan \frac{V_1}{V_2} \\ &= \arctan \frac{-V_\infty \cos \alpha_q \cos \Psi}{r\Omega + V_\infty \cos \alpha_q \sin \Psi}\end{aligned}\quad (2.12)$$

Cet angle de flèche dépend du rayon de la section de pale considérée. Toutefois, dans le cadre de l'étude, on considérera que l'angle de flèche précédent est constant et égal à sa valeur à 90% du rayon ($r = 0,9R$). Ainsi, tout se passe comme si, la ligne portante $\mathcal{L} = (y, x_o(y))$ était soumise à un dérapage (constant) d'angle $\Lambda(0,9R)$.

Ce dérapage est obtenu en calculant les coordonnées de la ligne portante dans le repère (O, x, y) lié à l'écoulement incident (Fig. 2.33) à l'aide d'une rotation d'angle :

$$\Lambda = \frac{-V_\infty \cos \alpha_q \cos \Psi}{0,9R\Omega + V_\infty \cos \alpha_q \sin \Psi}$$

De plus, la composition des vitesses donnent la norme de la vitesse vue par la section considérée : cette vitesse intervient dans le calcul de $\Gamma(y)$ pour rendre compte de la rotation du rotor.

La pale étant positionnée, il ne reste plus qu'à déterminer l'angle de flèche total, qui intervient explicitement dans l'expression de la vitesse complémentaire. Cet angle est calculé à partir des coordonnées des points de la ligne portante dans le repère (O, x, y) .

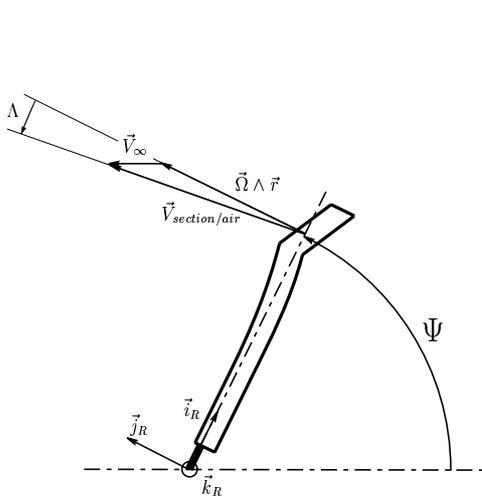


FIG. 2.32 – Angle de flèche

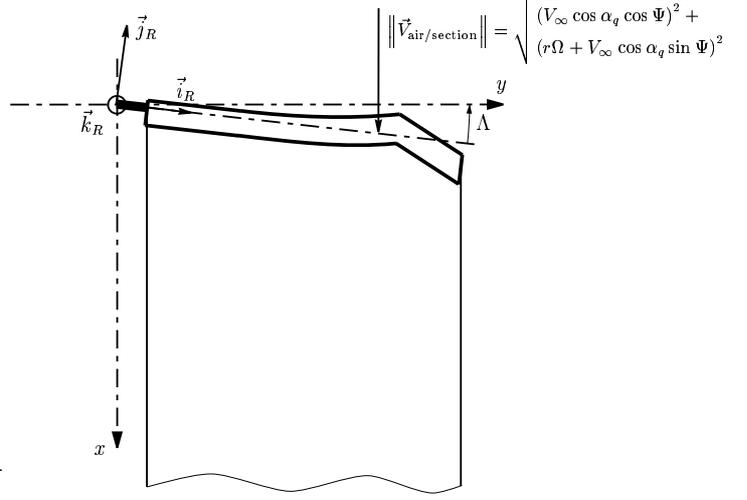


FIG. 2.33 – Configuration de calcul de la pale

Le dernier paramètre de vol est l'incidence d'une section de pale. Celle-ci intervient directement, ainsi que le vrillage et le calage, lors du calcul de la circulation (2.5). L'incidence α (hors vitesse induite par des phénomènes tourbillonnaires) est la somme de l'incidence géométrique θ_g et de l'incidence aérodynamique θ_a (Fig. 2.34).

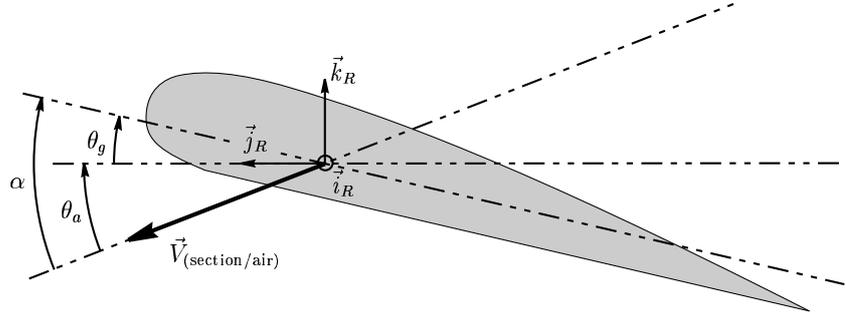


FIG. 2.34 – Définitions des diverses incidences

L'incidence géométrique est la somme du vrillage et de l'angle de pas :

$$\theta_g = \theta_v + \theta = \tau_v \left(\frac{r - R_{dpp}}{R} \right) + \theta_0 + \theta_{1c} \cos \Psi + \theta_{1s} \sin \Psi$$

L'incidence aérodynamique est donnée par :

$$\theta_a = -\arctan \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

Ce terme agit comme un vrillage supplémentaire qui dépend, pour une position azimutale donnée, du rayon. Pour l'étude, nous avons considéré cette incidence comme un terme géométrique supplémentaire

dans le vrillage. D'où finalement :

$$\alpha(r) = \tau_v \left(\frac{r - R_{dpp}}{R} \right) + \theta_0 + \theta_{1c} \cos \Psi + \theta_{1s} \sin \Psi + \arctan \frac{V_\infty \sin \alpha_q}{r\Omega + V_\infty \cos \alpha_q \sin \Psi} \quad (2.13)$$

Les conditions de vol stabilisé sont caractérisées par le paramètre de portance globale du rotor \bar{Z} :

$$\bar{Z} = \frac{200F_z}{\rho_{\text{air}} \Omega^2 R^2 S \sigma}$$

où σ est la plénitude du rotor. En vol stabilisé, ce paramètre renvoie à des valeurs de θ_{1c} , θ_{1s} , α_q et θ_0 connues pour chacune des pales considérées. Deux jeux de valeurs de ces paramètres (correspondant à deux valeurs de \bar{Z}) nous ont été fournis.

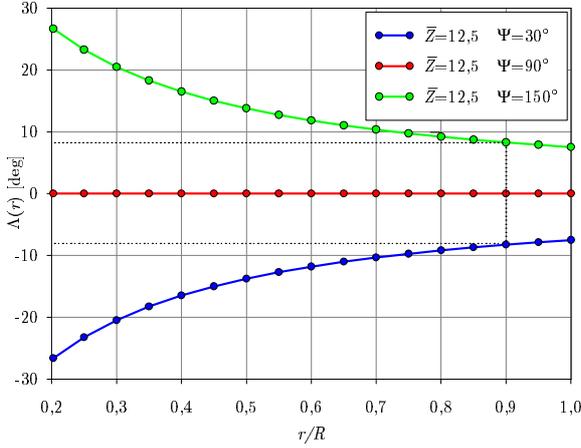


FIG. 2.35 – Évolution de la flèche en envergure sur la pale 7ad

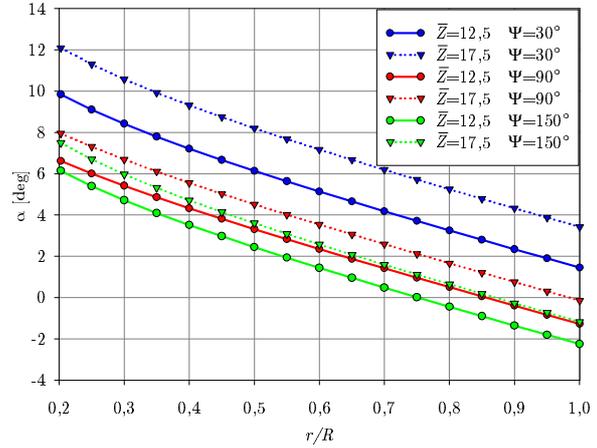


FIG. 2.36 – Évolution de l'incidence en envergure sur la pale 7ad

Nous n'avons par ailleurs considéré que le cas d'une pale avançante à des azimuts compris entre 30° et 150° . Ainsi, on peut en déduire la loi d'incidence en envergure (Fig. 2.36), ainsi que la loi de flèche vue par la pale qui nous permettra d'en déduire la valeur à $0,9R$ (Fig. 2.35). Lors de nos calculs de répartitions de circulation, nous considérerons donc des angles de flèche relativement faibles puisque l'on ne dépasse pas $\pm 9^\circ$. Notons également que l'incidence peut s'annuler voire prendre des valeurs négatives en extrémité de pales.

La configuration retenue est assez éloignée de la modélisation complète habituellement utilisée par l'ONERA. Ceci est particulièrement vrai pour la géométrie du sillage qui, même lorsqu'il est figé, est présenté sous la forme d'une nappe hélicoïdale de pas constant ; alors que notre approche (Fig. 2.33) s'appuie sur un sillage plan et convecté selon un angle Λ par rapport à la normale de la pale.

2.3.2 Confrontations des résultats

Nous avons procédé ici à de nombreuses évaluations de la circulation sur les trois pales déjà citées, pour six azimuts et deux cas de vol en palier. Pour chacun de ces cas, notre méthode de ligne portante et une méthode de ligne portante classique ont été mises en œuvre. Nous présentons ici quelques exemples significatifs de nos résultats (pour les pales 7ad et Erato).

Les résultats ci-après sont tous relatifs au même cas de vol stabilisé (même portance du rotor *i.e.* même \bar{Z}). On présente en premier lieu les répartitions de circulation pour ces deux pales. Censé représenter le même cas de vol, le comportement des pales est très différent. À certains azimuts, la pale 7ad présente une large zone de déportance (Fig. 2.37) qui s'explique par la valeur négative de l'incidence géométrique (Fig. 2.36).

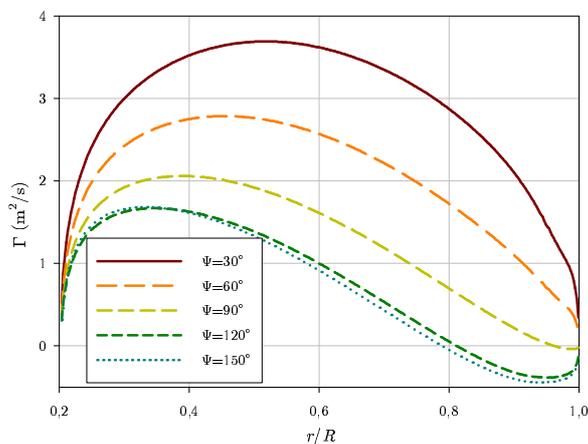


FIG. 2.37 – Circulations à différents azimuts sur la pale 7ad

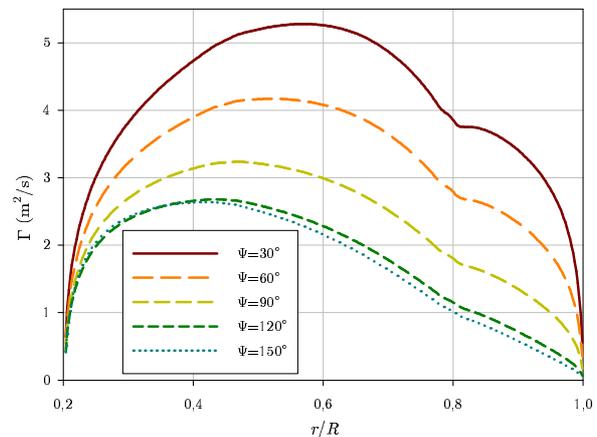


FIG. 2.38 – Circulations à différents azimuts sur la pale Erato

Les répartitions de circulation pour la pale Erato montre peu la trace du raccord. En revanche, les changements de courbure des répartitions traduisent la brusque variation de la flèche géométrique de la pale. On note également un comportement très proche pour les azimuts 120° et 150°, et ce quelle que soit la pale, du fait là encore de la faible variation des répartitions d'incidence entre ces deux azimuts.

En parallèle à l'application de notre méthode de ligne portante implicite, nous avons implémenté une méthode classique reposant sur le principe exposé au 1.1.2. On conserve pour cette seconde approche les mêmes discrétisations et les mêmes paramètres de vol (loi d'incidence et de vitesse) que pour notre démarche. Par conséquent, tous paramètres égaux par ailleurs, on peut observer l'erreur due à la méthode numérique employée. Celle-ci révèle la présence « d'accidents » dans la répartition de circulation aux ruptures de flèche. Plus encore que les études réalisées avec des géométries usuelles, on voit ici la faiblesse des méthodes de ligne portante classique lorsqu'elles sont confrontées à des ailes brisées, y compris

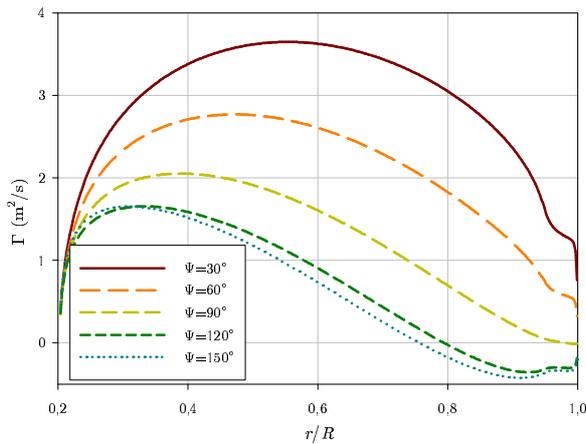


FIG. 2.39 – Circulations à différents azimuts sur la pale 7ad par l'approche classique

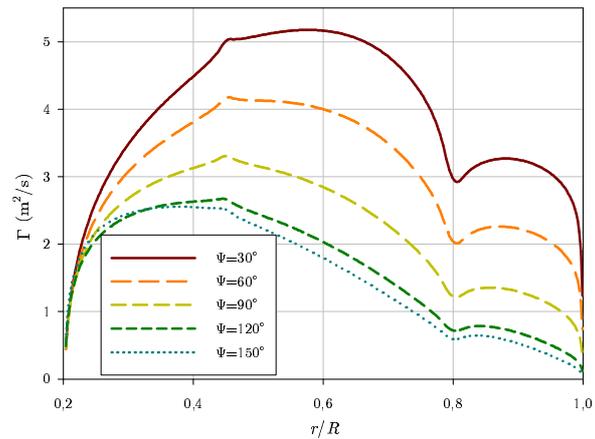


FIG. 2.40 – Circulations à différents azimuts sur la pale Erato par l'approche classique

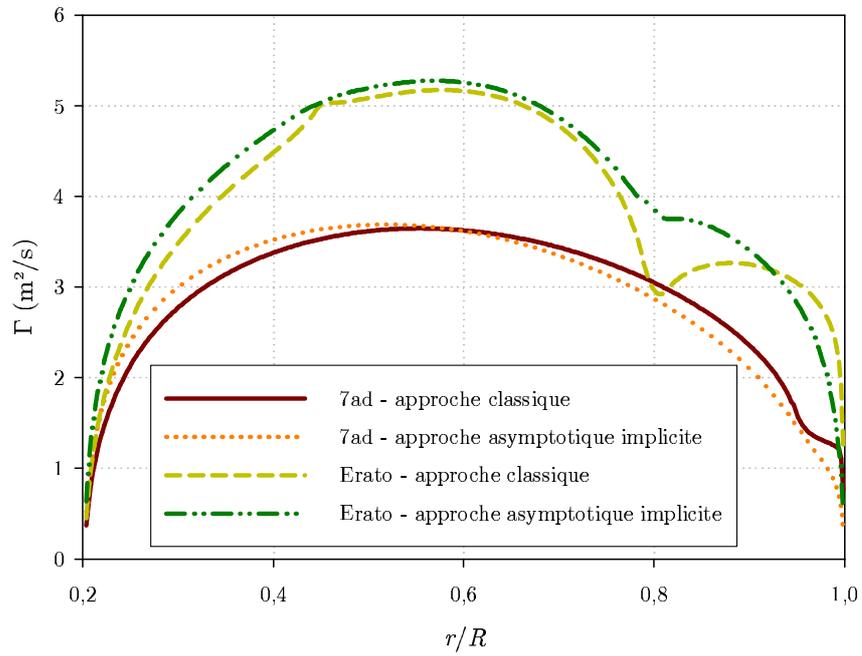
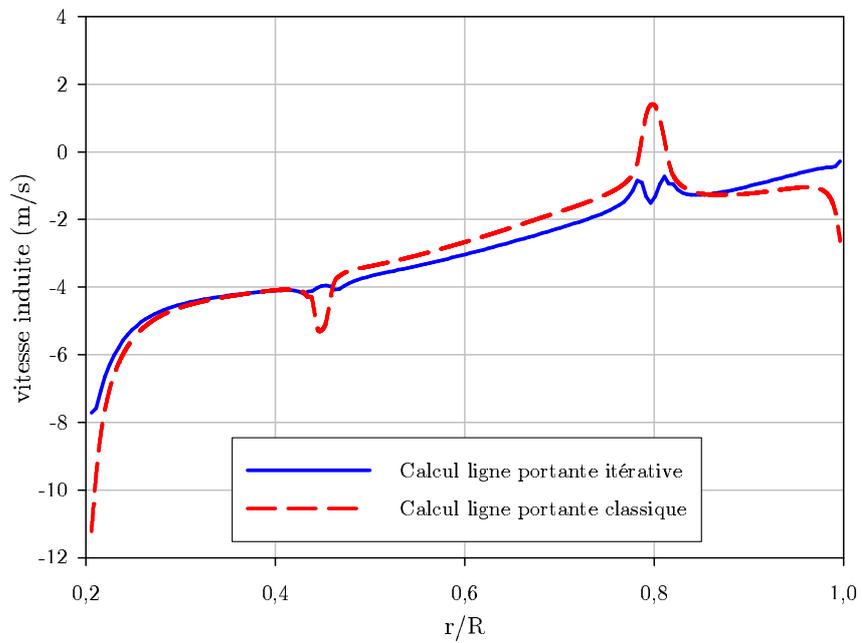
lorsqu'un raccord courbe est mis en place.

La figure 2.41 montre à l'azimut 30° , une comparaison des deux approches pour les pales 7ad et Erato. Les deux méthodes donnent des résultats qualitativement similaires. Les allures des répartitions sont proches ce qui permet de confirmer que la prise en compte explicite de la flèche et de la courbure via le terme de vitesse complémentaire w_c et l'utilisation de la notion de partie finie d'intégrales singulières sont de nature corrective. Quantitativement, nous avons vu que composition des vitesses de rotation et d'avancement imposent des angles de flèche effectifs relativement faibles (de l'ordre de 10°) ce qui explique les écarts le long des portions rectilignes des pales. Les principaux écarts apparaissent au voisinage des ruptures de flèche et de courbure que seule notre approche permet de prendre en compte.

Ces singularités sont bien évidemment également visibles sur la répartition en envergure de la vitesse induite (Fig. 2.42). Certaines valeurs semblent même aberrantes : on ne conçoit pas les raisons d'une brusque augmentation de la vitesse induite au voisinage de la seconde cassure de la pale allant même jusqu'à changer le signe de la vitesse induite en ce point.

La confrontation de ces calculs au même cas de vol évalué avec le code METAR montre des écarts significatifs. Nous reproduisons avec la figure 2.43 un cas de figure caractéristique qui n'a pour objectif qu'une comparaison qualitative des niveaux de circulations. Ils sont dans ce cas globalement équivalents, même si d'autres cas montrent des disparités plus importantes.

Les écarts sont évidemment dus aux approximations qui ont été faites dans la mise en œuvre de nos calculs. En particulier, la géométrie du sillage est très différente. METAR suppose un sillage hélicoïdal et prend en compte l'influence proche du sillage émis un tour rotor plus tôt. Alors que nos calculs supposent un sillage plan stationnaire et ne peuvent qu'ignorer cette influence. De même, les outils comme METAR

FIG. 2.41 – Comparaison des approches pour $\Psi = 30^\circ$ FIG. 2.42 – Vitesse induite sur la pale Erato à l'azimut 120°

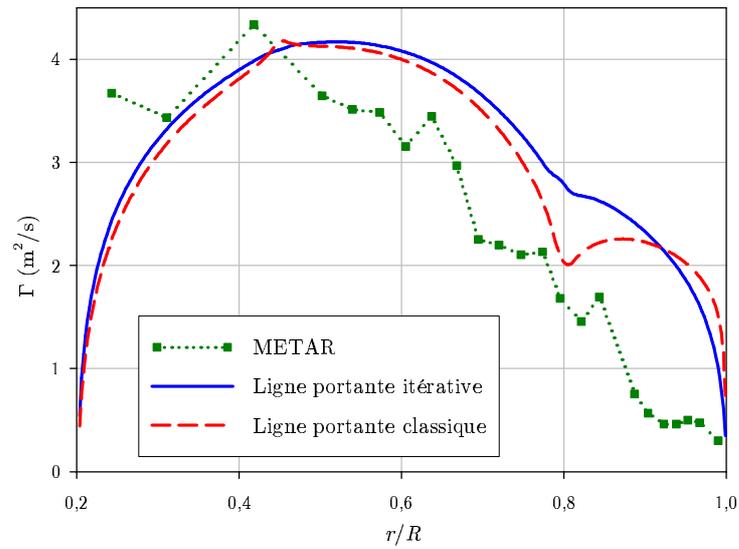


FIG. 2.43 – Répartitions de circulation sur la pale Erato à l'azimut $\Psi = 60^\circ$

intègrent les effets de profils réels²⁰ et de compressibilité. Nos calculs se limitent à des ailes dont les profils constitutifs sont des plaques planes en écoulement de fluide parfait incompressible.

Néanmoins, nous avons montré que notre approche permettait de contourner les limitations inhérentes à la ligne portante de Prandtl tout en conservant le schéma numérique de cette approche. La courbure et la flèche des pales étudiées, mieux prises en compte dans notre approche, montrent les évidentes limites de la théorie classique. Si l'implémentation de la ligne portante de Prandtl amplifie les « accidents » dès que la flèche et la courbure deviennent conséquentes, notre approche n'en présente aucun. L'étude réalisée ici a permis de vérifier la faisabilité d'un calcul de ligne portante implicite stationnaire courbe et en flèche pour des formes en plan non triviales.

²⁰via des polaires de profils $C_z(\alpha_{eff})$

Une ligne portante instationnaire

Sommaire

3.1	Développement d'une méthode instationnaire	69
3.1.1	Vitesse induite par le domaine intérieur	70
3.1.2	Vitesse induite par le domaine extérieur O_{wi}	71
3.1.3	Vitesse induite instationnaire bi-dimensionnelle	72
3.1.4	Vitesse induite par le domaine extérieur $O \cup O_{wi}$	73
3.1.5	Répartition de circulation instationnaire	75
3.2	Implémentation de la méthode instationnaire	76
3.2.1	Implémentation de la vitesse induite par le domaine $O \cup O_{wi}$	77
3.2.2	Autour du domaine bi-dimensionnel	83
3.2.3	Implémentation implicite linéarisée	86
3.2.4	Schéma algorithmique	88
3.3	Mise en œuvre quasi-stationnaire	90
3.4	Résultats et validations	92
3.4.1	La méthode VLM	92
3.4.2	Résultats quasi-stationnaires	93
3.4.3	Résultats instationnaires	95

Hélices, rotors, éoliennes, safrans... sont autant d'éléments aérodynamiques réels dont le fonctionnement impose une étude instationnaire. La place des écoulements instationnaires en mécanique des fluides est au moins aussi importante que celle des écoulements stationnaires. Qui aurait l'idée d'étudier un phénomène aéro-élastique en régime établi en omettant ce qui permet d'arriver à cet état ou les éventuelles perturbations extérieures forcément dimensionnantes? Citons également, les problèmes de transitions, de démarrages impulsifs, de manoeuvres, de fonctionnements périodiques, de décrochages dynamiques... qui tous présentent une dépendance temporelle forte. On voit alors que les applications

auxquelles nous songeons pour notre démarche rentrent dans ce cadre et qu'il est difficilement envisageable de se contenter d'une approche stationnaire pour étudier le comportement de voilures tournantes en air libre soumises à une évolution instationnaire. C'est pourquoi la mise au point d'une méthode de ligne portante instationnaire pour des ailes de forme en plan arbitraire représente un intérêt non seulement théorique mais surtout pratique.

Fort de notre démarche stationnaire et des résultats obtenus, nous avons abordé le calcul instationnaire de la répartition de circulation par une méthode de ligne portante. La démarche envisagée doit, encore une fois, être compatible avec les outils classiques utilisant la ligne portante et impose donc une description précise du sillage en espace et en temps ainsi qu'une expression implicite de la circulation. Le schéma en temps considéré pour notre approche est une marche en temps. Cette description temporelle est particulièrement bien adaptée aux méthodes de singularités en aérodynamique pour lesquelles on considère l'émission discrète de portions de sillage.

Nous reviendrons brièvement sur les outils requis par notre méthode qui sont essentiellement la décomposition en sous domaines d'influence issue du développement asymptotique de l'équation intégrale du problème portant (Sellier, 1990). Puis nous présenterons notre traitement de chacun de ces domaines et comment nous obtenons une équation implicite pour la circulation. Ceci sera suivi de la mise en place d'une méthode quasi-stationnaire puis de la description de la résolution numérique de notre méthode.

Aux hypothèses usuelles de la ligne portante telles que rappelées en introduction de ce mémoire, il convient d'ajouter quelques hypothèses spécifiques à l'aspect instationnaire. Ainsi, nous considérerons que le fluide est animé à l'infini amont d'un mouvement uniforme et stationnaire. L'aile mince sera animée d'un mouvement de faible amplitude de telle manière que l'écoulement résultant ne diffère de l'écoulement initial que d'une perturbation. L'aile et son sillage mince demeureront à tout instant dans un seul et même plan (Fig. 3.1).

3.1 Développement d'une méthode instationnaire

Nous avons vu, dans le chapitre 2, qu'en stationnaire une description asymptotique de la ligne portante permettait d'établir une méthode de calcul implicite similaire, pour sa forme, à la démarche de Prandtl et qui pour le fond donne accès aux performances d'ailes de forme en plan complexe.

De plus, la première partie de ce rapport a montré que l'acceptation asymptotique de la ligne portante couplée à la technique des développements asymptotiques raccordés a permis d'étendre considérablement le domaine d'application de la ligne portante. Les travaux de Sellier (1990) et de Guermond et Sellier (1991) constituent probablement l'aboutissement des méthodes de lignes portantes planes²¹. Néanmoins, elles ne connaissent, dans les faits, aucune implémentation pratique.

C'est pourquoi, à la manière de notre travail dans le cadre stationnaire, nous proposons dans ce qui suit une méthode de ligne portante instationnaire utilisant les résultats de la théorie asymptotique, seuls résultats théoriquement fondés, dans une description implicite de la ligne portante.

L'un des résultats fondamentaux que nous utiliserons concerne la description asymptotique instationnaire du domaine constitué par l'aile et son sillage (Fig. 3.1). Cette description déjà sous-jacente dans les travaux de Cheng et Meng (1980) notamment, a été explicitée par Guermond et Sellier (1991) dans une décomposition en sous-domaine de la nappe tourbillonnaire ($S \cup \Sigma$). Ces auteurs expriment la condition de glissement sur (S), portant sur la dérivée normale du potentiel des vitesses, à l'aide d'une fonction de Green pour obtenir une équation intégrale. Celle-ci est alors développée asymptotiquement en fonction d'un petit paramètre d'intégrales en partie finie au sens d'Hadamard. Sellier (1990) montre, en dernière analyse, qu'en chaque point M_0 de la ligne portante seuls demeurent trois domaines d'influence :

- le domaine intérieur I caractérise l'influence proche des points situés à une distance de l'ordre de C du point M_0 ,
- son sillage O_{wi} dont les points sont situés à une distance de l'ordre de B ou plus de M_0 et dont la largeur est notée D ,
- le domaine extérieur O caractérise l'influence lointaine (de l'ordre de B ou plus) des points n'appartenant ni à I , ni à O_{wi} .

La largeur caractéristique du domaine intérieur étant D et sachant que $C \ll D \ll B$, chaque domaine peut être étudié indépendamment. La vitesse induite en un point M_0 de la ligne portante est alors égale à la somme des contributions de chacun de ces domaines.

A la suite de Devinant (1998) pour l'aile droite en écoulement instationnaire, nous allons reprendre cette description du problème et évaluer l'influence de chacun de ces domaines pris indépendamment des

²¹au sens où la ligne et la nappe de sillage demeurent dans un même plan tout au long de l'évolution

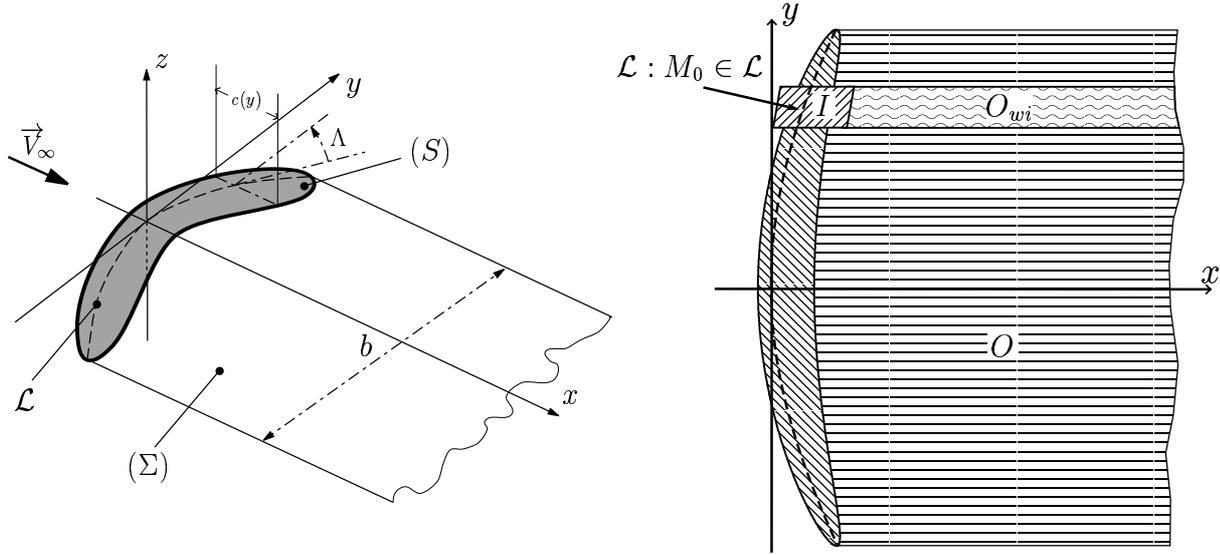


FIG. 3.1 – Position du problème instationnaire

autres pour en déduire l'écriture instationnaire de la vitesse induite par la ligne. La démarche proposée ici, s'inscrit dans la classe des mouvements à basses fréquences²² que l'on trouve, par exemple, pour des voilures tournantes de grand allongement. Comme nous le rappelons dans la section 1.3.3, ce domaine fréquentiel permet de ne pas distinguer la position sur la corde du point de calcul. Alors que la démarche asymptotique montre une dépendance harmonique de la vitesse induite entre le point sur la ligne portante et tout autre point sur le même profil, nous pourrions considérer, dans la suite, que le point de calcul est un point M_0 de la ligne portante (\mathcal{L}) et négliger cette dépendance. Corollairement, la théorie suppose un mouvement harmonique de l'aile dans un fluide en écoulement uniforme. Or ci-après nous ne présumons aucun type de mouvement particulier, *a fortiori* non forcément harmonique.

3.1.1 Vitesse induite par le domaine intérieur

Les dimensions caractéristiques de ce domaine sont de l'ordre de D en envergure et en corde. Localement, cette zone est composée des tourbillons liés *i.e.* situés sur (S) et de tourbillons libres *i.e.* situés dans la partie proche du sillage (Σ) incluse dans I (Fig. 3.2). D'autre part, pour le domaine intérieur I relatif au point $M_0(y_i, x_0(y_i))$, l'aile dont la dimension caractéristique est B se réduit à une aile d'envergure infinie inclinée de $\Lambda(M_0)$.

Par conséquent, si l'on considère, en première approximation, que seule la composante $\vec{\gamma}$ alignée avec la tangente locale à la ligne portante intervient, les vitesses induites sont alors données par :

$$w_{\text{liée}}(M_0) = -\frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_{S \cap I} \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{x_0(y_i) - \xi} d\xi \quad (3.1)$$

²²au sens de Cheng (1975), voir p.20

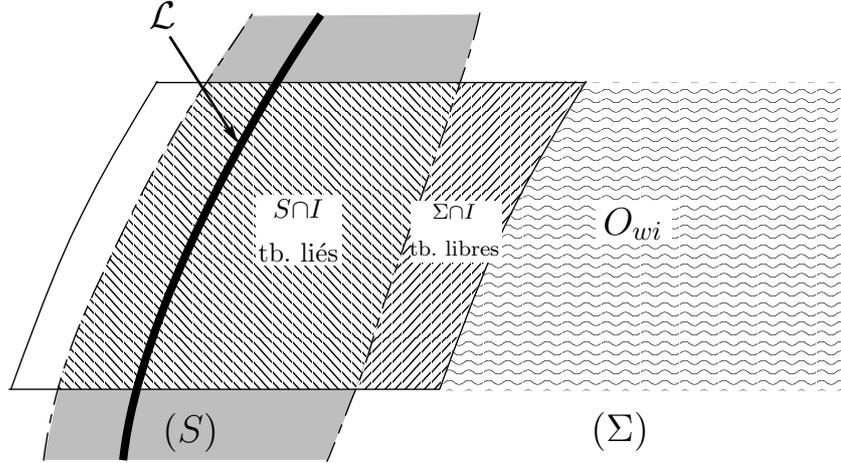


FIG. 3.2 – Description du domaine intérieur

$$w_{\text{libre}}(M_0) = -\frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_{\Sigma \cap I} \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{x_0(y_i) - \xi} d\xi \quad (3.2)$$

Ces deux vitesses sont de type bi-dimensionnel mais ne constituent pas à elles seules une vitesse bi-dimensionnelle car elles ne tiennent pas compte des tourbillons émis par I , convectés à une distance de l'ordre de B et qui ont encore une influence sur la ligne portante.

Pour la zone de tourbillons liés, il convient d'ajouter la vitesse due à l'influence de la forme de la ligne portante et à la variation de la circulation en envergure *i.e.* la vitesse complémentaire :

$$w_c(M_0) = \left[\frac{\Gamma(y_i, t)}{4\pi r(y_i)} + \sin \Lambda_i \frac{\partial \Gamma(y_i, t) / \partial y}{2\pi} \right] \left[\ln \left(\frac{c(y_i)}{4\mathcal{R}} \right) + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Gamma(y_i, t)}{4\pi r(y_i)} \left[1 - \tan^2 \Lambda_i - \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda_i} \right) \right] + \frac{\partial \Gamma(y_i, t) / \partial y}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin \Lambda_i}{\cos \Lambda_i} \right| - \sin \Lambda_i \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda_i} \right) \right] \quad (3.3)$$

Ainsi, à un instant donné, la vitesse induite en M_0 par le domaine intérieur s'écrit :

$$w_{in}(M_0) = w_c(M_0) + w_{\text{libre}}(M_0) + w_{\text{liée}}(M_0)$$

3.1.2 Vitesse induite par le domaine extérieur O_{wi}

Ce domaine ne peut être interprété qu'à l'aune de la description asymptotique du système tourbillonnaire composé par l'aile et son sillage. Localement, O_{wi} est une nappe de tourbillons s'appuyant sur une ligne tangente en M_0 à (\mathcal{L}) et dont les tourbillons sont inclinés selon cette même tangente. Mais à l'échelle du domaine O , O_{wi} s'apparente également à un sillage bi-dimensionnel issu du domaine I incliné d'un angle Λ_i .

Dans la première acception, si l'on considère que seule la composante tourbillonnaire alignée avec la tangente locale à la ligne portante au point courant intervient, on retrouve la vitesse induite par le

sillage bi-dimensionnel dont la densité tourbillonnaire vaut $\gamma_y(\xi, y_i)/\cos \Lambda_i$ à savoir :

$$\begin{aligned} w_{wi}(M_0) &= \frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_{x_0(y_i)}^{X(y_i, 0, t)} \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\xi - x_0(y_i)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_0^{X(y_i, 0, t) - x_0(y_i)} \frac{\gamma_y(u, y_i)}{u} du \end{aligned} \quad (3.4)$$

en notant $X(y_i, 0, t)$ la position à l'instant t de l'extrémité aval du sillage issu du point y_i , autrement dit la position de la première « particule » émise dans le sillage par le bord de fuite du profil situé en y_i .

On peut donc assimiler ce domaine à un sillage bi-dimensionnel qui prolonge l'influence du domaine intérieur dans le domaine extérieur en convectant le domaine intérieur émis à des instants précédents à une distance de l'ordre de B ou plus.

3.1.3 Vitesse induite instationnaire bi-dimensionnelle

Comme nous l'avons déjà remarqué, les termes $w_{liée}$ et w_{libre} dans (3.1) et (3.2) sont de nature bi-dimensionnelle, comme la vitesse induite par O_{wi} . En réunissant ces trois influences, il est possible de faire apparaître une vitesse induite bi-dimensionnelle :

$$w_{2D}(M_0) = w_{liée}(M_0) + w_{libre}(M_0) + w_{wi}(M_0) \quad (3.5)$$

On reconnaît dans l'équation (3.5) le problème bi-dimensionnel d'un profil en écoulement instationnaire. Comme dans James (1975) ou Devinant (1998), ce problème 2D est résolu à l'aide de la théorie linéarisée du profil en écoulement instationnaire. Choisir cette option est assez logique dans le cadre de la ligne portante où les hypothèses d'écoulements faiblement perturbés et de mouvements de faibles amplitudes ont été posées.

Chaque profil est supposé rigide et assimilé, via une transformation conforme de Joukowski, à une plaque plane de corde $4a$. Son mouvement dans un fluide au repos, déduit de celui de la ligne portante, est exprimé dans le référentiel lié au profil (l, m, q) .

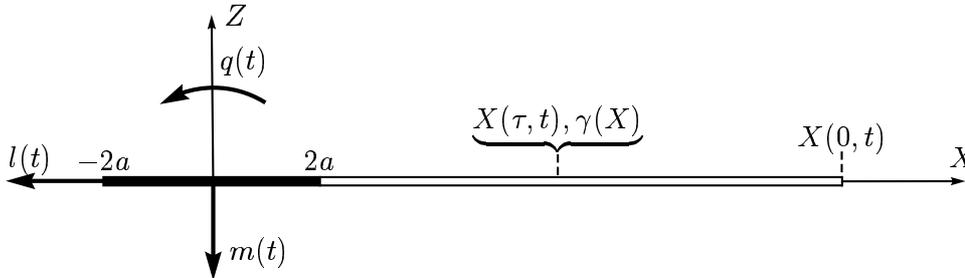


FIG. 3.3 – Le problème instationnaire 2D linéarisé

On peut alors écrire :

$$\begin{pmatrix} l(t) & = & -v_\infty + l'(t) \\ m(t) & = & m'(t) \\ q(t) & = & q'(t) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{translation rectiligne uniforme} \\ \leftarrow \text{pilonnement} \\ \leftarrow \text{tangage autour du centre du profil} \end{array}$$

où les variables $(.)'$ représentent les perturbations sur les trois axes. L'approche linéarisée assure que le mouvement longitudinal du profil est peu différent d'une translation rectiligne uniforme à la vitesse $-v_\infty$, qui n'est autre que la vitesse normale vue par le profil ($v_\infty = V_\infty \cos \Lambda$). Chaque fluctuation $(l'(t), m'(t), q'(t))$ est supposée très petite devant la vitesse v_∞ .

Chaque profil émet un sillage sur l'axe (O, X) qui est délimité par le bord de fuite $X = 2a$ du profil d'une part, et par le premier tourbillon émis à $\tau = 0$, $X(0, t) = 2a + v_\infty t$, d'autre part. À chaque particule $X(\tau, t) = 2a + v_\infty (t - \tau)$ du sillage est associée la densité tourbillonnaire $\gamma(X)$ déterminée lors de son émission au temps $t = \tau$ puis convectée dans la direction X à la vitesse v_∞ . En particulier, $X(t, t) = 2a$ représente la dernière « particule » émise à l'instant présent t .

Le problème est alors décrit par deux équations. La première est due au théorème de Kelvin qui régit la conservation de la densité tourbillonnaire dans un domaine fermé contenant le profil et son sillage :

$$\frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t} - v_\infty \gamma(X(t, t)) = 0 \quad (3.6)$$

Les conditions de vitesse normale nulle sur le profil ainsi que la condition de Kutta-Joukowski donnent l'évolution temporelle de la circulation dans l'équation intégrale suivante :

$$\Gamma(t) = \Gamma_{prof}(t) + \frac{1}{\cos \Lambda} \int_{2a}^{X(0,t)} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \cdot \gamma(\xi) d\xi \quad (3.7)$$

où $\Gamma_{prof}(t)$ traduit le mouvement instationnaire du profil et vaut dans le cas de la plaque plane :

$$\Gamma_{prof}(t) = -4\pi a (m(t) + q(t)\varpi)$$

où ϖ est voisin de a (Couchet, 1976).

L'équation (3.7), dans laquelle nous considérerons que seule la composante de $\vec{\gamma}$ alignée avec (\mathcal{L}) au point de contrôle considéré intervient, permet donc de décrire le comportement instationnaire du profil.

3.1.4 Vitesse induite par le domaine extérieur $O \cup O_{wi}$

Intéressons nous au domaine extérieur dans son intégralité. La dimension de référence étant B , les détails en corde de l'aile (qui sont de l'ordre de C) ne sont plus perceptibles. Ainsi, l'aile et son sillage tendent asymptotiquement vers une ligne portante et son sillage. Celui-ci se présente sous la forme d'une nappe de doublets à axes normaux dont la vitesse induite est équivalente à celle induite par une nappe

tourbillonnaire de densité surfacique $\vec{\gamma}$. Celle-ci est obtenue à l'aide de la valeur de la circulation calculée à chaque instant en chaque point de la ligne portante, puis convectée dans le sillage.

Nous nous devons d'évoquer ici la configuration du sillage afin de déterminer la vitesse qu'il induit en un point de l'aile. Bien que nous nous intéressions à décrire le comportement instationnaire d'une aile, nous avons restreint notre propos à un sillage plan linéarisé. Cette dernière hypothèse nous éloigne des applications dans laquelle le sillage est déformé, néanmoins la mise en place que nous présentons ici est indispensable pour valider la démarche instationnaire.

Il apparaît donc nécessaire de déterminer la vitesse induite par une nappe mince de tourbillons dont la densité vectorielle est connue en chaque point de la nappe. Soit (Σ) cette nappe et considérons un élément de surface élémentaire $d\xi d\psi$ autour du point (ξ, ψ) de densité $\vec{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y)$ (Fig. 3.4). D'après Bisplinghoff *et al.* (1955), cet élément induit une vitesse élémentaire dw au point $P(x, y)$ telle que :

$$dw(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\gamma_x(\xi, \eta)(y - \psi) + \gamma_y(\xi, \eta)(x - \xi)}{[(x - \xi)^2 + (y - \psi)^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \quad (3.8)$$

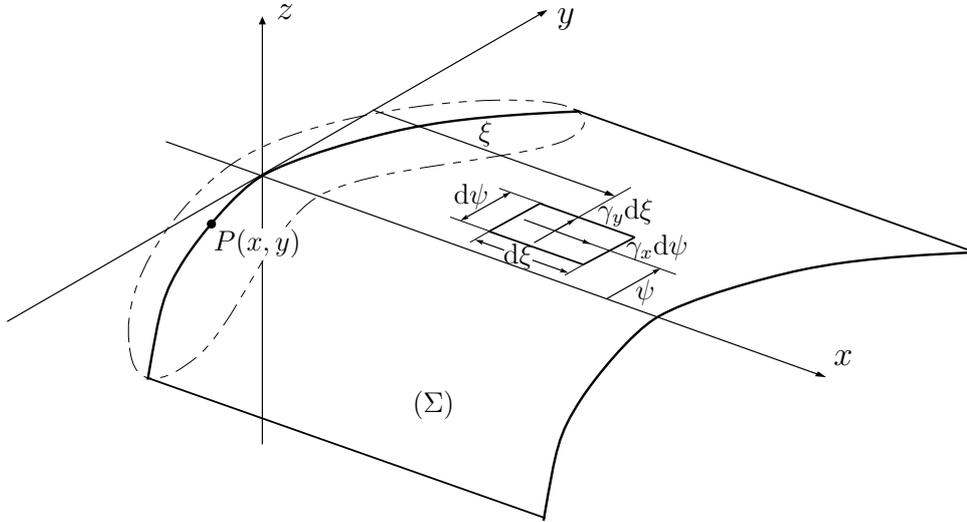


FIG. 3.4 – Élément tourbillonnaire élémentaire $d\xi d\psi$

Si la nappe contient le point de contrôle, la vitesse induite par la nappe est singulière et il convient de considérer la sommation au sens des parties finies d'Hadamard, soit :

$$\forall P(x, y) \in \Sigma, w(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\gamma_x(\xi, \eta)(y - \psi) + \gamma_y(\xi, \eta)(x - \xi)}{[(x - \xi)^2 + (y - \psi)^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \quad (3.9)$$

3.1.5 Répartition de circulation instationnaire

A l'image du formalisme proposé par Prandtl (1923) en stationnaire, notre approche instationnaire consiste pour chaque section de l'aile à considérer une description bi-dimensionnelle instationnaire corrigée par un terme d'incidence induite tri-dimensionnelle instationnaire due au sillage issu de la ligne portante. Ce terme fait apparaître la vitesse induite $w(y, t)$ par le sillage et est constituée par la somme des vitesses induites par les différents domaines isolés par Sellier (1990), *i.e.* :

$$w(y, t) = w_{2D}(y_i, t) + w_c(y_i, t) + w_{out}(y_i, t) - w_{wi}(y_i, t)$$

dans laquelle le terme $-w_{wi}(y_i, t)$ compense la double prise en compte du domaine O_{wi} dans $w_{out}(y_i, t)$ et dans $w_{2D}(y_i, t)$.

Après linéarisation et adimensionnement par la vitesse du vent incident, la répartition de circulation sur l'aile est donnée par :

$$\Gamma(y_i, t) = \Gamma_{prof}(y_i, t) + \pi c(y_i) \cos \Lambda_i \times \frac{1}{\mathcal{R}} \left[w_{2D}(y_i, t) + w_c(y_i, t) + w_{out}(y_i, t) - w_{wi}(y_i, t) \right] \quad (3.10)$$

Notons que le terme w_c revêt un caractère particulier puisqu'il couple les effets bi et tri-dimensionnels. En effet, cette vitesse provient du domaine intérieur (donc d'origine bi-dimensionnelle) mais fait apparaître des variables typiquement tri-dimensionnelles ($\Lambda, r, \dot{\Gamma}$).

De plus l'équation (3.10) présente la caractéristique d'être une relation implicite. En effet, bien qu'utilisant les résultats de la théorie asymptotique, cette équation fait apparaître l'inconnue du problème $\Gamma(y_i, t)$ de part et d'autre de l'égalité, au travers de :

- $\Gamma(y_i, t)$ et $\frac{\partial \Gamma(y_i, t)}{\partial y}$ dans w_c et w_{out} ,
- $\frac{\partial \Gamma(y_i, t)}{\partial t}$ dans w_{wi} , w_{out} et w_{2D} ,

et s'inscrit ainsi dans la lignée de la théorie de Prandtl. Évidemment, le schéma de résolution est plus complexe à mettre en œuvre puisqu'il s'agit de la recherche d'un point fixe. Nous présenterons dans la suite une implémentation ainsi que les optimisations permettant d'obtenir des temps de calcul faibles. Il est alors envisageable à court terme d'implémenter notre méthode dans des codes de calcul industriels. Par ailleurs, simplifier notre démarche instationnaire en une démarche quasi-stationnaire est chose relativement simple comme nous le verrons au §3.3, page 90.

3.2 Implémentation de la méthode instationnaire

Le premier objectif de l'implémentation instationnaire est de proposer une méthode de marche en temps issue de la description que nous proposons dans la section 3.1. Nous avons choisi de n'appliquer une densité de doublets variant linéairement que sur une surface relativement restreinte : le voisinage immédiat du point de contrôle. Or si la rapidité propre à la ligne portante est assurée par cette simplicité de la description du sillage, il a fallu adapter certains termes dans l'équation (3.10).

Nous allons donc dans la suite éclairer le lecteur sur la mise en œuvre pratique de la détermination des vitesses induites par chacun des domaines. Nous conservons évidemment les hypothèses déjà rappelées, en particulier celles imposées par les descriptions asymptotiques. Ainsi, nous demeurons dans un cadre linéarisé dont l'utilisation est rendue possible par l'hypothèse du mouvement de faible amplitude de l'aile proche d'une translation rectiligne uniforme. Bien évidemment, nous considérerons que l'aile et son sillage demeurent dans un seul et même plan à tout instant.

En ce qui concerne le mouvement de l'aile, il convient d'apporter quelques précisions. Nous avons choisi le cas simple à mettre en œuvre de la mise en incidence impulsive globale. Ce mouvement a deux avantages : le premier est qu'il n'est en pas purement harmonique et va permettre de vérifier la validité de notre méthode dans un tel cas de figure. Le second est que ce mouvement est probablement le plus pénalisant pour une méthode instationnaire. Très brutale, la mise en incidence impulsive permet d'observer la zone transitoire du comportement de l'aile entre l'instant de mise en incidence et l'établissement de l'état stationnaire.

La description du mouvement n'intervient que dans le terme Γ_{prof} qui prend dans le cas présent la forme $\pi c(y) \cos \Lambda_i \alpha$. Notons qu'à condition de modifier l'expression de Γ_{prof} en écrivant la vitesse d'entraînement des profils constitutifs de l'aile dans un repère lié aux profils, tout autre mouvement est à même d'être implémenté dans la présente méthode (pilonnement, oscillations...). Dans ce cas précis, l'équation (3.10) se met sous la forme suivante :

$$\Gamma(y_i, t) = \pi c(y_i) \cos \Lambda_i \left[\alpha(y_i) + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(w_{2D}(y_i, t) + w_c(y_i, t) + w_{out}(y_i, t) - w_{wi}(y_i, t) \right) \right] \quad (3.11)$$

avec, en notant $X(y_i, 0, t)$ la position à l'instant t de l'extrémité du sillage issu du point y_i et émis à l'instant $\tau = 0$:

$$w_{2D}(y_i, t) = \frac{1}{\pi c(y_i) \cos \Lambda_i} \int_{2a}^{X(y_i, 0, t)} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi \quad (3.12)$$

Dans (3.11), la dernière soustraction est rendue nécessaire par la double prise en compte de la vitesse induite par O_{wi} : la première dans w_{2D} et la seconde dans w_{out} pour laquelle le domaine de calcul ne présente pas la coupure O_{wi} .

3.2.1 Implémentation de la vitesse induite par le domaine $O \cup O_{wi}$

Le schéma temporel retenu est très classique dans le domaine des méthodes de singularités puisqu'il s'agit d'une « marche en temps ». Celle-ci consiste, à un instant donné, à émettre une bande de sillage correspondant à la variation temporelle de la circulation sur la ligne portante. Cette bande est ensuite convectée aux instants suivants.

Le schéma spatial conditionne directement le schéma de discrétisation du sillage. On discrétise classiquement la ligne portante en segments rectilignes $[y_{b_i}, y_{b_{i+1}}]_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. La ligne portante est connue analytiquement par la fonction x_0 (éventuellement définie par morceaux) de classe \mathcal{C}^2 et on place au milieu de chacun de ces segments un point de contrôle $(y_i, x_0(y_i))$.

Si T est la durée d'évolution, on discrétise $[0, T]$ en m intervalles égaux $\Delta t = T/m$. À chaque instant, on émet une bande de sillage de largeur $\Delta x = V_\infty \Delta t$. Comme indiqué figure 3.5, on pose alors le paramètre δ tel que $\delta c_0 = V_\infty \Delta t$ où c_0 est une valeur de référence de la corde. Ainsi, chaque point de discrétisation du sillage est défini à l'aide de l'instant courant $p \in \llbracket 0, m \rrbracket$, la date d'émission $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ et le point origine $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ceci se traduit par un maillage géométrique de la ligne portante et de son sillage (Fig. 3.5).

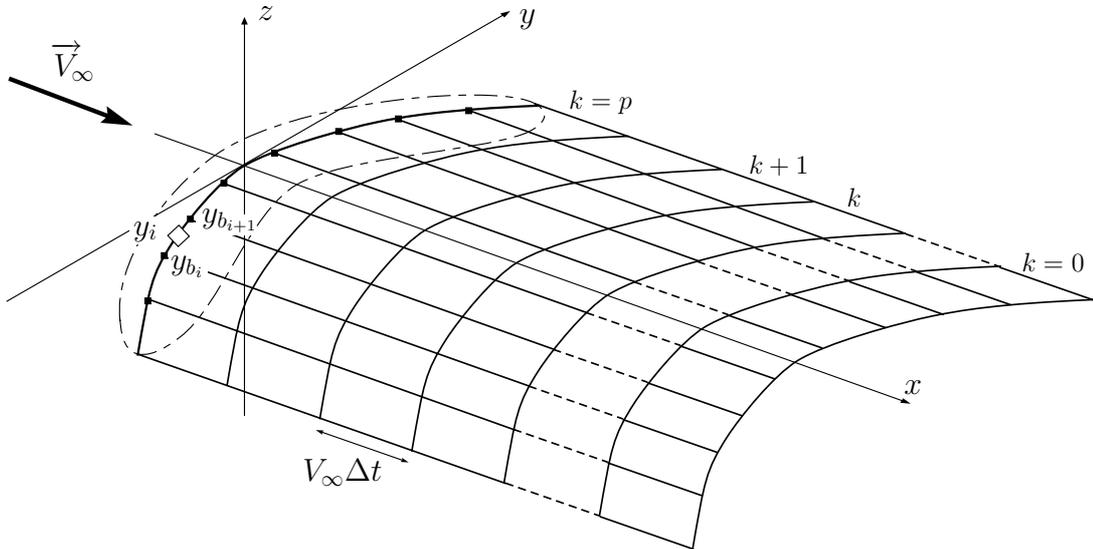


FIG. 3.5 – Mise en place des discrétisations

La discrétisation de la circulation va imposer la nature des éléments tourbillonnaires surfaciques appliqués sur chaque parallélogramme (j, k) . La première approche possible considère que la circulation sur la ligne portante est une fonction constante par morceaux. Ainsi, chaque panneau du sillage est un panneau de doublets de densité constante. On montre qu'un tel arrangement est équivalent à un treillis de

filaments tourbillonnaires dont l'intensité est la différence des valeurs des doublets des panneaux adjacents (Fig. 3.6).

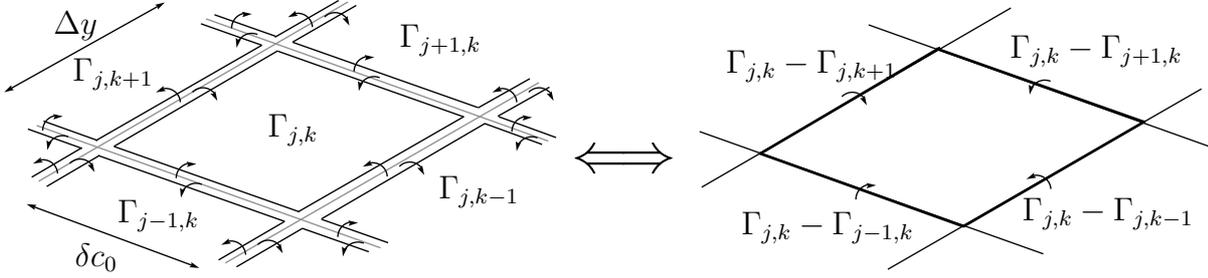


FIG. 3.6 – Treillis de filaments tourbillonnaires

La vitesse w_{ijk} induite par cet élément au point $(y_i, x_0(y_i))$ est donc donnée par la relation de Biot et Savart appliquée aux quatre segments tourbillonnaires, chaque composante est ensuite sommée en envergure et en temps pour donner la vitesse induite par le sillage w_{out} au point de contrôle :

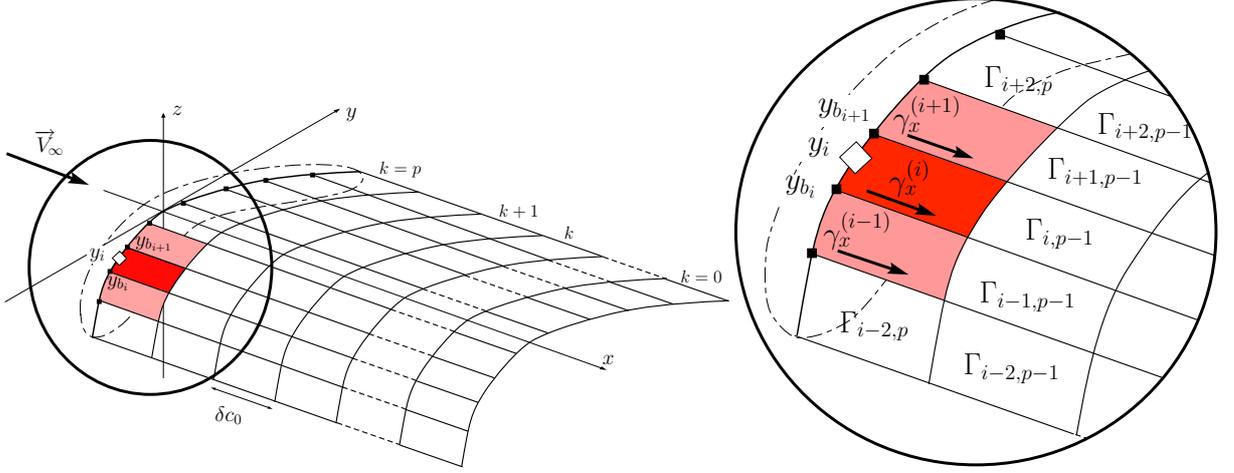
$$w_{out}(y_i, t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p w_{ijk} \quad (3.13)$$

Cette description du sillage apparaît suffisante pour une aile droite placée perpendiculairement au vent incident (Devinant, 1998). Pour des ailes courbes, notre travail dans le cadre stationnaire a montré la nécessité d'une description plus évoluée du sillage où un voisinage du point de calcul est décrit à l'aide de bandes dont la densité de doublets varie linéairement. Nous avons donc transposé ces mêmes constatations dans la description instationnaire du sillage mince en proposant une densité tourbillonnaire non nulle au voisinage du point de contrôle.

Il est une propriété des intégrales en partie finie au sens d'Hadamard qu'il convient d'exploiter. En effet, la propriété de linéarité de l'intégration au sens des parties finies d'Hadamard nous permet, à partir de l'équation (3.9), de décomposer l'influence de la densité tourbillonnaire vectorielle $\vec{\gamma}$ selon ses composantes γ_x et γ_y .

Dans un premier temps, nous avons considéré le cas où $\gamma_y \equiv 0$ et γ_x est constante par morceaux sur un voisinage du point de contrôle alors qu'en dehors de ce voisinage, le sillage est représenté par un treillis tourbillonnaire. Le voisinage choisi regroupe le panneau courant ainsi que ses deux plus proches voisins, hormis lorsque le panneau courant est le premier ou le dernier où l'on ne considère que le premier voisin (Fig. 3.7).

Par ailleurs, $\gamma_x(y, x_0(y))$ correspond à la variation en envergure de la circulation $\Gamma(y, t)$ au même

FIG. 3.7 – Voisinage du point de contrôle sur lequel $\gamma_x \neq 0$

instant et à la même position. Ainsi, on considérera sur chaque panneau i :

$$\gamma_x(y, x_0(y)) = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right|_{y=y_i} = \gamma_x^{(i)}$$

Par conséquent, la vitesse induite w_{out} au point $(y_i, x_0(y_i))$ est déterminée pour une part avec (3.9) et pour l'autre avec (3.13), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} w_{out}(y_i, t) = & \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p \left(1 - \delta_{0k} \sum_{j=i-1}^{i+1} \delta_{ij} \right) w_{ijk} - \frac{\gamma_x^{(i-1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i-1}}}^{y_{b_i}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta_{c0}} \frac{(y_i - \psi) d\xi d\psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{\gamma_x^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta_{c0}} \frac{y_i - \psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \\ & - \frac{\gamma_x^{(i+1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i+1}}}^{y_{b_{i+2}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta_{c0}} \frac{y_i - \psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \end{aligned} \quad (3.14)$$

On peut remarquer dans (3.14) l'emplacement de la singularité mathématique. En effet, les intégrales relatives aux voisins sont régulières alors que pour le panneau contenant le point de contrôle, nous utilisons de nouveau le formalisme d'Hadamard. Cette intégrale double étant à bornes liées (*i.e.* les bornes d'intégration sur ξ dépendent de ψ), nous appliquons la partie finie uniquement sur une des deux intégrales, celle sur l'envergure.

Pour l'intégrale à régulariser, on fait apparaître une nappe semi-infinie de telle manière à retrouver des intégrales déjà rencontrées *i.e.* :

$$\int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta_{c0}} = \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)}^{+\infty} - \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)+\delta_{c0}}^{+\infty}$$

Cette dernière intégrale est impropre convergente car le point de contrôle est distinct de la surface d'intégration. Un calcul de limite donne :

$$\int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)+\delta c_0}^{+\infty} \frac{(y_i - \psi) d\xi d\psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \left[1 + \frac{x_0(y_i) - (x_0(\psi) + \delta c_0)}{\sqrt{(x_0(y_i) - (x_0(\psi) + \delta c_0))^2 + (y_i - \psi)^2}} \right] \frac{d\psi}{(y_i - \psi)}$$

En ce qui concerne l'intégrale en partie finie, on réalise l'intégration régulière vis-à-vis de la variable ξ selon le même procédé que (1.21) page 20 :

$$\int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} (y_i - \psi) \int_{x_0(\psi)}^{+\infty} \frac{d\xi d\psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \frac{1}{(y_i - \psi)} \left[1 + \frac{x_0(y_i) - x_0(\psi)}{\sqrt{(x_0(y_i) - x_0(\psi))^2 + (y_i - \psi)^2}} \right] d\psi$$

Or nous avons déjà remarqué (voir notamment l'Annexe A) que cette intégrale possède une singularité d'ordre un et donc que la considérer en valeur principale de Cauchy lève l'irrégularité²³.

Les résultats proposés en annexe permettent de reconnaître l'intégrale ($-I_{PV}$) page 111 et de conclure sur l'expression de la vitesse induite pour ce modèle de sillage. En reprenant les notations de l'annexe :

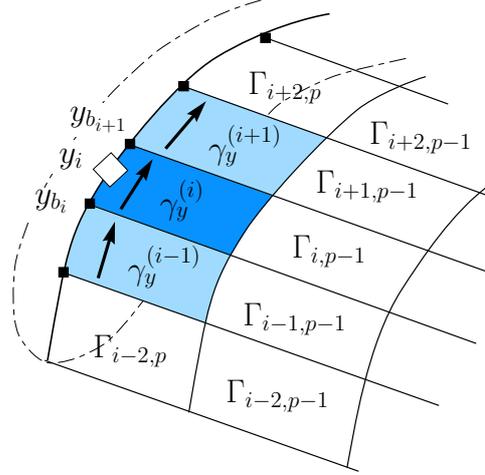
$$\begin{aligned} w_{out}(y_i, t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p \left(1 - \delta_{0k} \sum_{j=i-1}^{i+1} \delta_{ij} \right) w_{ijk} - \frac{\gamma_x^{(i-1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i-1}}}^{y_{b_i}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{(y_i - \psi) d\xi d\psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &- \frac{\gamma_x^{(i+1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i+1}}}^{y_{b_{i+2}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{y_i - \psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \\ &+ \frac{\gamma_x^{(i)}}{4\pi} \left(\ln \frac{y_{b_{i+1}} - y_i}{y_i - y_{b_i}} - \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \text{sgn}(u) \cdot \sin \Lambda_i}{u} du - \sin \Lambda_i \cdot \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i)(y_i - y_{b_i})] \right) \\ &+ \frac{\gamma_x^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \frac{1}{(y_i - \psi)} \left[1 + \frac{x_0(y_i) - (x_0(\psi) + \delta c_0)}{\sqrt{(x_0(y_i) - (x_0(\psi) + \delta c_0))^2 + (y_i - \psi)^2}} \right] d\psi \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans un second temps, nous avons considéré une variation temporelle à y fixé de Γ linéaire et donc une densité γ_y non nulle. Le but est de l'associer à la description précédente où γ_x est pris en compte avec la variation de circulation en envergure. De même que précédemment, nous avons considéré cette densité tourbillonnaire sur un voisinage du point de contrôle. Ce voisinage s'étend sur les deux plus proches panneaux voisins du panneau courant (Fig. 3.8).

Ainsi, la fonction γ_y sera considérée constante par morceaux et verra sa valeur en tous points du panneau (j, p) avec $j = i - 1, i, i + 1$ prise à :

$$\gamma_y(y_j, x_0(y_j)) = \frac{1}{V_\infty} \left. \frac{\partial \Gamma(y, t)}{\partial t} \right|_{y=y_j} = \gamma_y^{(j)}$$

²³L'utilisation de la notion de partie finie pour une intégrale à considérer en valeur principale n'est pas une incorection du fait que la seconde est un cas particulier de la première.

FIG. 3.8 – Description du sillage avec $\gamma_y \neq 0$, $\gamma_x = 0$ et notations

Au regard de la figure 3.4, la vitesse induite en y_i par une telle disposition est donnée par l'équation (3.9). Ainsi, si l'on considère uniquement l'influence de γ_y , la vitesse induite en y_i s'écrit :

$$\begin{aligned}
w_{out}(y_i, t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p \left(1 - \delta_{0k} \sum_{j=i-1}^{i+1} \delta_{ij} \right) w_{ijk} - \frac{\gamma_y^{(i-1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i-1}}}^{y_{b_i}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{(x_0(y_i) - \xi) d\xi d\psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
&- \frac{\gamma_y^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{x_0(y_i) - \xi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \\
&- \frac{\gamma_y^{(i+1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i+1}}}^{y_{b_{i+2}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{x_0(y_i) - \xi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi
\end{aligned} \tag{3.16}$$

De même que précédemment, on considère deux domaines pour l'intégrale singulière en écrivant :

$$\int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} = \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)}^{+\infty} - \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)+\delta c_0}^{+\infty}$$

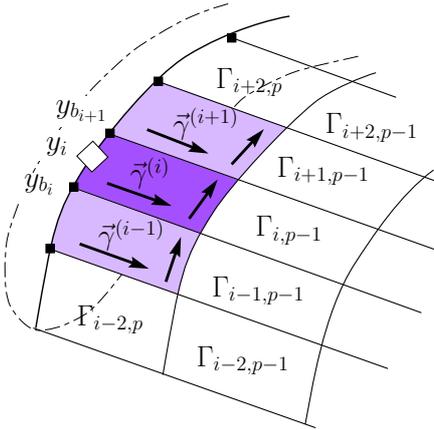
Il apparaît de nouveau une intégrale à considérer en partie finie d'Hadamard qui, quoique formellement assez proche des précédentes, nécessite une nouvelle régularisation. Conformément à notre habitude,

nous appliquons la définition (1.33), page 29, ce qui nous donne avec les notations de l'annexe B²⁴ :

$$\begin{aligned}
w_{out}(y_i, t) = & \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p \left(1 - \delta_{0k} \sum_{j=i-1}^{i+1} \delta_{ij} \right) w_{ijk} - \frac{\gamma_y^{(i-1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i-1}}}^{y_{b_i}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{(x_0(y_i) - \xi) d\xi d\psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
& + \frac{\gamma_y^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}-y_i}^{y_{b_{i+1}}-y_i} \frac{h_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \cos \Lambda_i}{u} du + \frac{\gamma_y^{(i)} \cdot \cos \Lambda_i}{4\pi} \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i)(y_i - y_{b_i})] \\
& - \frac{\gamma_y^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \frac{d\psi}{\sqrt{(x_0(\psi) + \delta c_0 - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2}} \\
& - \frac{\gamma_y^{(i+1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i+1}}}^{y_{b_{i+2}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{x_0(y_i) - \xi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Dans les deux cas précédents, l'utilisation de densités tourbillonnaires constantes permet une régularisation analytique de la relation (3.9). Par ailleurs, le détail des calculs menant à (3.15) et (3.17) montrent que cette équation intégrale ne présente qu'une singularité d'ordre un et donc que l'intégrale dans (3.9) ne nécessite qu'une valeur principale au sens de Cauchy.

In fine, en vertu de la propriété de linéarité de l'intégration au sens des parties finies d'Hadamard, nous pouvons considérer à chaque instant, pour le panneau courant et ses deux premiers voisins une répartition de γ_x et de γ_y constante sur chaque panneau. A l'instant t , on pose alors pour un point (y, x) tel que $y \in [y_{b_i}, y_{b_{i+1}}]$ et $x \in [x_0(y), x_0(y) + \delta c_0]$ les densités tourbillonnaires suivantes :



$$\begin{aligned}
\gamma_y(x, y) &= \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \Gamma(y_i, t)}{\partial t} = \gamma_y^{(i)} \\
\gamma_x(x, y) &= \frac{\partial \Gamma(y_i, t)}{\partial y} = \gamma_x^{(i)}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

FIG. 3.9 – Discrétisation définitive du sillage instationnaire

²⁴nous proposons au lecteur de se reporter à cette section pour le détail des calculs

La vitesse induite par un tel sillage s'écrit, d'après (3.15) et (3.17) :

$$\begin{aligned}
w_{out}(y_i, t) = & \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p \left(1 - \delta_{0k} \sum_{j=i-1}^{i+1} \delta_{ij} \right) w_{ijk} - \frac{\gamma_y^{(i-1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i-1}}}^{y_{b_i}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{(x_0(y_i) - \xi) d\xi d\psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
& + \frac{\gamma_y^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}-y_i}^{y_{b_{i+1}}-y_i} \frac{h_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \cos \Lambda_i}{u} du + \frac{\gamma_y^{(i)} \cdot \cos \Lambda_i}{4\pi} \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i)(y_i - y_{b_i})] \\
& - \frac{\gamma_y^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \frac{d\psi}{\sqrt{(x_0(\psi) + \delta c_0 - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2}} \\
& - \frac{\gamma_y^{(i+1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i+1}}}^{y_{b_{i+2}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{x_0(y_i) - \xi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \\
& - \frac{\gamma_x^{(i-1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i-1}}}^{y_{b_i}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{y_i - \psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \\
& - \frac{\gamma_x^{(i+1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i+1}}}^{y_{b_{i+2}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{y_i - \psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \\
& + \frac{\gamma_x^{(i)}}{4\pi} \left(\ln \frac{y_{b_{i+1}} - y_i}{y_i - y_{b_i}} - \int_{y_{b_i}-y_i}^{y_{b_{i+1}}-y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \sin \Lambda_i}{u} du - \sin \Lambda_i \cdot \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i)(y_i - y_{b_i})] \right) \\
& + \frac{\gamma_x^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \frac{1}{(y_i - \psi)} \left[1 + \frac{x_0(y_i) - (x_0(\psi) + \delta c_0)}{\sqrt{(x_0(y_i) - (x_0(\psi) + \delta c_0))^2 + (y_i - \psi)^2}} \right] d\psi
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ce qui constitue l'expression que nous retiendrons en vue du calcul de la vitesse induite par le domaine O .

3.2.2 Autour du domaine bi-dimensionnel

L'expression de w_{2D} dans (3.12) montre la nécessité de connaître la densité γ_y sur le domaine $\Sigma_{2D} = [2a, X(0, t)]^{25}$ *i.e.* sur toute la longueur du sillage issu du bord de fuite en $2a$. On peut cependant modifier cette expression afin de s'affranchir de cette contrainte. Nous allons pour ce faire décomposer le domaine $\Sigma_{2D} = I \cup O_{wi}$ en deux domaines d'influence : proche et lointaine. Posons ainsi Ξ_y tel que $\Xi_y \gg a$. Alors :

$$\Sigma_{2D} = [2a, \Xi_y] \cup [\Xi_y, X(0, t)]$$

et :

$$w_{2D}(y_i, t) = \frac{1}{\pi c(y_i) \cos \Lambda_i} \left[\int_{2a}^{\Xi_y} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi + \int_{\Xi_y}^{X(0, t)} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi \right]$$

²⁵par commodité lorsque nous parlerons du problème 2D, nous remplacerons la notation $X(y, 0, t)$ par celle plus simple $X(0, t)$

Or, pour la seconde intégrale il est possible de simplifier une partie du noyau de l'intégrale :

$$\text{si } \Xi_y \gg a \text{ alors } \forall \xi > \Xi_y, \sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} = 1 + \frac{2a}{\xi - 2a} + o\left(\frac{1}{\xi - 2a}\right)$$

et donc au premier ordre :

$$\int_{\Xi_y}^{X(0,t)} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi \approx \int_{\Xi_y}^{X(0,t)} \frac{2a}{\xi - 2a} \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi$$

On peut alors écrire w_{2D} sous la forme suivante :

$$w_{2D}(y_i, t) = \frac{1}{\pi c(y_i) \cos \Lambda_i} \int_{2a}^{\Xi_y} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi + \frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_{\Xi_y}^{X(0,t)} \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\xi - 2a} d\xi \quad (3.20)$$

Mettons maintenant en perspective les équations (3.20) et (3.4) en vue du calcul de $w_{2D} - w_{wi}$:

$$\begin{aligned} w_{2D}(y_i, t) - w_{wi}(y_i, t) &= \frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_{\Xi_y}^{X(0,t)} \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\xi - 2a} d\xi - \frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_0^{X(y_i, 0, t) - x_0(y_i)} \frac{\gamma_y(u, y_i)}{u} du \\ &\quad + \frac{1}{\pi c(y_i) \cos \Lambda_i} \int_{2a}^{\Xi_y} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi \end{aligned} \quad (3.21)$$

En modifiant la première intégrale à l'aide du changement de variable $u = \xi - 2a$, et en posant $\Theta_y = \Xi_y - 2a$ on obtient :

$$\begin{aligned} w_{2D}(y_i, t) - w_{wi}(y_i, t) &= \frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_{\Theta_y}^{X(0,t) - 2a} \frac{\gamma_y(u, y_i)}{u} du \\ &\quad - \frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_0^{X(y_i, 0, t) - x_0(y_i)} \frac{\gamma_y(u, y_i)}{u} du + \frac{1}{\pi c(y_i) \cos \Lambda_i} \int_{2a}^{\Xi_y} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nous avons donc fait apparaître une différence de vitesses induites entre d'une part, une ligne de sillage (de densité γ_y) s'étendant de l'abscisse $u = \Theta_y$ jusqu'à l'extrémité du sillage $X(0, t) - 2a$, et d'autre part, une ligne de sillage (de densité γ_y) s'étendant de l'abscisse $u = 0$ jusqu'à l'extrémité du sillage $X(y_i, 0, t) - x_0(y_i) = X(0, t) - 2a$ puisque issu du même point y_i . Les deux intégrales renvoient en effet à la même singularité : la portion de sillage du domaine bi-dimensionnel ($I \cup O_{wi}$) située entre Θ_y et $X(y_i, 0, t) - x_0(y_i)$, mais la première intégrale dans (3.22) en constitue une acception à l'échelle de la corde alors que la seconde la décrit à l'échelle de l'envergure.

Ainsi, l'équation (3.21) peut être simplifiée en :

$$w_{2D}(y_i, t) - w_{wi}(y_i, t) = \frac{1}{\pi c(y_i) \cos \Lambda_i} \int_{2a}^{\Xi_y} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) \frac{\gamma_y(\xi, y_i)}{\cos \Lambda_i} d\xi - \frac{1}{2\pi \cos \Lambda_i} \int_0^{\Theta_y} \frac{\gamma_y(u, y_i)}{u} du \quad (3.23)$$

avec : $\Theta_y = \Xi_y - 2a = \Xi_y - c(y_i) \cos \Lambda_i / 2$.

Cette écriture permet de réduire la nécessaire connaissance de la composante γ_y de la densité tourbillonnaire à un domaine de longueur Θ_y et donc diminue la complexité du modèle de sillage. Il reste

à choisir une valeur du paramètre Θ_y . Or pour w_{out} nous avons choisi de prendre en compte la densité tourbillonnaire γ_y jusqu'à une distance de l'ordre de δc_0 du point de calcul. Ainsi, un choix logique en regard de w_{out} est : $\Theta_y = \delta c_0$. Comme le suggère Devinant (1998), le choix le plus pertinent est de considérer que ce paramètre prend une valeur de l'ordre de la corde de référence. Nous verrons dans la suite, avec nos résultats, que nous vérifions cette assertion.

Par ailleurs, nous avons considéré une densité tourbillonnaire constante par morceaux, à savoir :

$$\forall \xi \in [x_0(y_i), x_0(y_i) + \delta c_0], \frac{\partial \gamma_y(\xi, y_i)}{\partial \xi} = 0 \text{ et } \gamma_y(\xi, y_i) = \gamma_y^{(i)} \quad (3.24)$$

alors (3.23) devient :

$$(w_{2D} - w_{wi})(y_i, t) = \frac{\gamma_y^{(i)}}{\pi c(y_i) \cos^2 \Lambda_i} \int_{\frac{1}{2}\pi c(y_i) \cos \Lambda_i}^{\frac{1}{2}\pi c(y_i) \cos \Lambda_i + \delta c_0} \left(\sqrt{\frac{\xi + \frac{1}{2}\pi c(y_i) \cos \Lambda_i}{\xi - \frac{1}{2}\pi c(y_i) \cos \Lambda_i}} - 1 \right) d\xi - \frac{\gamma_y^{(i)} \ln(\delta c_0)}{2\pi c(y_i) \cos \Lambda_i} \quad (3.25)$$

Intéressons-nous désormais à cette première intégrale. Le lecteur aura peut-être remarqué que nous ne considérons pas la valeur principale de cette intégrale. Et ce, tout simplement parce que cette intégrale est impropre et convergente. En effet, la question de la convergence se pose lorsque $\xi \rightarrow \frac{1}{2}\pi c(y_i) \cos \Lambda_i = 2a$, il vient en utilisant les notations (plus lisibles) du problème bi-dimensionnel :

$$\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} \underset{\xi \rightarrow 2a}{\sim} (\xi - 2a)^\alpha \text{ et } \alpha = -\frac{1}{2} > -1$$

ce qui assure l'existence de l'intégrale. Une primitive uniformément valable sur $]2a, 2a + \delta c_0]$:

$$\int \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) d\xi = (\xi - 2a) \sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - \xi + 2a \ln \left(\xi + (\xi - 2a) \sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} \right)$$

Ce qui donne alors :

$$\begin{aligned} \int_{2a}^{2a+\delta c_0} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) d\xi &= \left[\sqrt{\xi^2 - 4a^2} - \xi + 2a \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 4a^2} \right) \right]_{2a}^{2a+\delta c_0} \\ &= 2a \left[\sqrt{\left(\frac{\xi}{2a} \right)^2 - 1} - \frac{\xi}{2a} + \ln 2a + \ln \left(\frac{\xi}{2a} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{2a} \right)^2 - 1} \right) \right]_{2a}^{2a+\delta c_0} \end{aligned}$$

et, en posant $\vartheta = (2a + \delta c_0)/(2a)$, il vient :

$$\int_{2a}^{2a+\delta c_0} \left(\sqrt{\frac{\xi + 2a}{\xi - 2a}} - 1 \right) d\xi = 2a \left[1 - \vartheta + \sqrt{\vartheta^2 - 1} + \ln \left(\vartheta + \sqrt{\vartheta^2 - 1} \right) \right] \quad (3.26)$$

Les équations (3.26) et (3.25) permettent d'écrire finalement :

$$(w_{2D} - w_{wi})(y_i, t) = \frac{\gamma_y^{(i)}}{2 \cos \Lambda_i} \left[1 - \vartheta + \sqrt{\vartheta^2 - 1} + \ln \left(\vartheta + \sqrt{\vartheta^2 - 1} \right) \right] - \frac{\gamma_y^{(i)} \ln(\delta c_0)}{2\pi c(y_i) \cos \Lambda_i} \quad (3.27)$$

3.2.3 Implémentation implicite linéarisée

La répartition de circulation instationnaire en un point y_i de l'aile est donnée par (3.11) :

$$\Gamma(y_i, t) = \pi c(y_i) \cos \Lambda_i \left[\alpha(y_i) + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(w_{2D}(y_i, t) + w_c(y_i, t) + w_{out}(y_i, t) - w_{wi}(y_i, t) \right) \right]$$

pour laquelle :

- $w_{out}(y_i, t)$ est donnée par (3.19), page 83,
- $w_c(y_i, t)$ est donnée par (3.3), page 71,
- et la différence $w_{2D}(y_i, t) - w_{wi}(y_i, t)$ est donnée par (3.27), ci-dessus.

Ces quatre équations montrent le caractère implicite du problème où l'inconnue $\Gamma(y, t)$ intervient dans les deux membres de (3.11). Aussi avons-nous résolu cette dernière à l'aide d'un schéma itératif où la répartition de circulation à chaque pas de temps est le résultat d'un processus convergé. Il convient alors de recalculer à chaque itération la densité tourbillonnaire émise dans le sillage. Si on pose, $\Gamma^{(it)}(y_i, t)$ la valeur de la circulation à l'instant t , au point y_i et calculée à l'itération it , on a à cette même itération les densités tourbillonnaires suivantes :

$$\gamma_y^{(i)} = \frac{\Gamma^{(it-1)}(y_i, t) - \Gamma(y_i, t - \Delta t)}{\delta c_0} \quad \text{et} \quad \gamma_x^{(i)} = \frac{\Gamma^{(it-1)}(y_{b_{i+1}}, t) - \Gamma^{(it-1)}(y_{b_i}, t)}{y_{b_{i+1}} - y_{b_i}}$$

Chaque pas de temps est donc le résultat d'une recherche de point fixe relaxé où la valeur initiale du processus itératif est celle donnée par la répartition de circulation stationnaire bi-dimensionnelle.

En ce qui concerne l'implémentation pratique de (3.19), les intégrales de Riemann sur des surfaces ont fait l'objet d'une intégration analytique vis-à-vis de la variable ξ puis numérique vis-à-vis de la variable ψ . Cette dernière a été menée à l'aide d'une méthode de type « trapèzes » d'ordre 2. Pour ce faire chaque segment d'intégration a été sous-discretisé en 32 intervalles. Ce nombre a montré une précision suffisante dans tous les cas que nous avons étudiés et représente un rapport précision – temps de calcul satisfaisant.

Précisons qu'il est nécessaire d'avoir un nombre d'intervalles pair (*i.e.* un nombre de points impair) afin d'assurer l'existence d'un sommet d'un trapèze au point y_i milieu du segment d'intégration ; non pour les intégrales régulières mais pour celles à considérer en partie finie pour lesquelles la fonction à intégrer est alors explicitement prolongée par continuité à gauche et à droite du point singulier.

Cette précaution assure la pérennité de la démarche de régularisation des intégrales hypersingulières que nous utilisons. En effet, seule l'évaluation analytique de l'intégrande au point singulier permet une régularisation correcte : dans le cas contraire, la valeur de la partie finie dépend de la position du dernier point d'intégration, autrement dit, de la dimension (ε) du voisinage autour de la singularité et celle-ci devient un paramètre de la régularisation (ce que propose Le Bouar-Coppens, 1999). Le prolongement

permet de s'affranchir de la définition explicite d'un tel voisinage.

Le caractère implicite de notre méthode peut faire craindre une vitesse d'exécution problématique. Néanmoins, l'exploitation d'une hypothèse déjà largement utilisée nous permet d'assurer le lecteur qu'il n'en sera rien : la linéarité. En effet, à l'itération it du calcul à l'instant t , l'inconnue $\Gamma^{(it)}(y_i, t)$ ou ses combinaisons linéaires γ_x et γ_y apparaissent en facteur de chaque vitesse induite.

Il nous a donc semblé nécessaire de déterminer en premier lieu les différentes vitesses en tous les points $(y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ induites par chaque panneau $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ de circulation ou densité tourbillonnaire unitaires et pour chaque pas de temps $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$. Connaissant le nombre de pas de temps m initialement, nous avons choisi de déterminer tous les coefficients d'influence avant même d'entamer la marche en temps.

Plus précisément, étant donné que la majeure partie du sillage est constituée d'un treillis de filaments tourbillonnaires, nous proposons un cube dont chaque terme (i, j, k) renvoie la vitesse induite au point y_i par le panneau issu du segment $[y_{b_j}, y_{b_{j+1}}]$ et émis à l'instant k . Cette vitesse est calculée par la relation de Biot et Savart. Chaque terme, à l'exception de ceux renvoyant au voisinage immédiat du point de contrôle, reçoit la vitesse unitaire correspondant au panneau et au point de contrôle considérés.

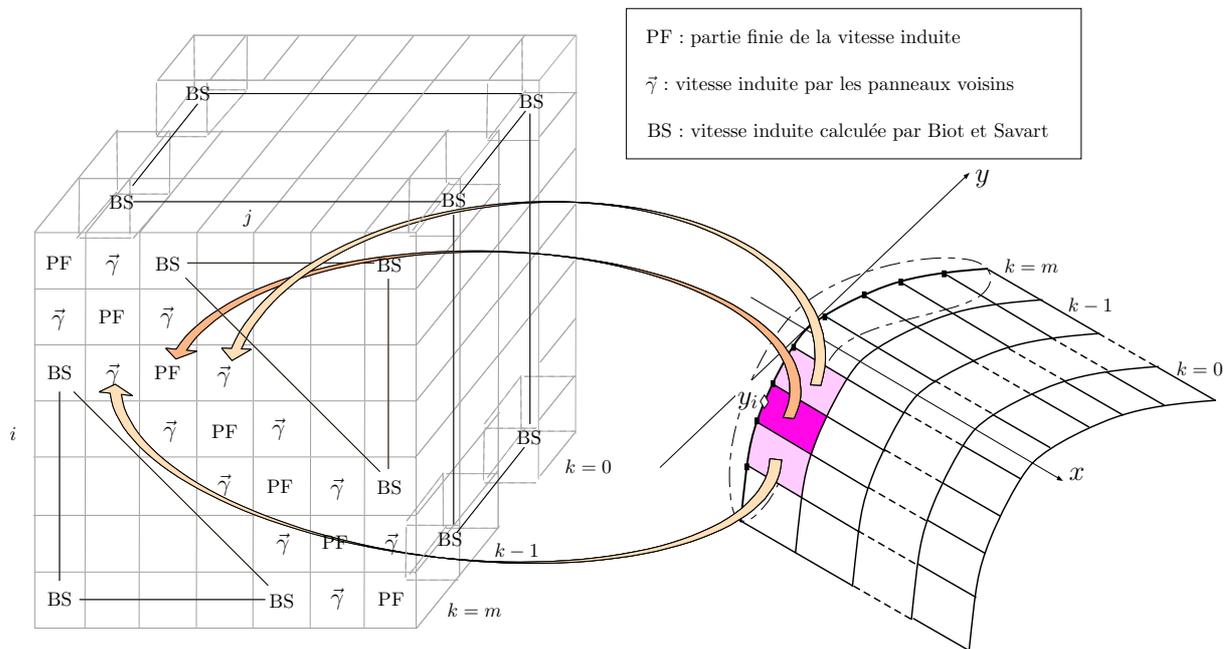


FIG. 3.10 – Calculs unitaires des vitesses induites - cube d'influence

A ceci, on ajoute une matrice tri-diagonale (Fig. 3.10) indépendante du temps qui renferme les termes d'influence dus à la bande en cours d'émission. Ainsi, les termes diagonaux représentent la partie finie de la vitesse induite par le panneau i en y_i par une densité tourbillonnaire $\tilde{\gamma}^{(i)}$ unitaire. Les termes des deux diagonales secondaires traduisent l'influence au point y_i des deux panneaux adjacents $i - 1$ et

$i + 1$ pour lesquels des densités tourbillonnaires, $\vec{\gamma}^{(i-1)}$ et $\vec{\gamma}^{(i+1)}$, sont également considérées.

L'utilisation de ce pré-calcul permet d'accélérer considérablement la marche en temps. L'intégralité du cube étant connue avant la marche en temps, son exploitation revient alors à considérer autant de matrices constitutrices que de pas de temps déjà écoulés en considérant l'indispensable première matrice ($k = m$) puis les suivantes ($k = m - 1, m - 2 \dots$) jusqu'à la matrice en $k = m - p$ où p correspond à l'instant courant.

3.2.4 Schéma algorithmique

Plus qu'un long exposé, nous souhaitons montrer ici le schéma global retenu pour l'implémentation de notre méthode. On remarquera que le détail n'est pas fourni pour mettre l'accent sur l'arborescence générale du code de calcul. En effet, dans la mesure où une perspective de ce travail est l'implémentation dans des codes de calcul de performances de rotors d'hélicoptères, le schéma suivant constituera sans nul doute une aide pour ce portage.

On remarque la présence de la subroutine externe x_0 qui permet de considérer analytiquement la forme de la ligne portante. Au besoin, cette fonction peut être définie par morceaux à la condition expresse que la fonction soit globalement de classe \mathcal{C}^2 . Celle-ci n'intervient qu'en amont de la marche en temps lors du calcul des paramètres géométriques (flèche et courbure) et des coefficients d'influence.

Puis, pour tous les pas de temps, la recherche itérative de la répartition de circulation est initialisée par la valeur Γ_0 à la manière de ce que nous utilisons dans notre méthode stationnaire. Alors, les composantes de la densité tourbillonnaire peuvent être évaluées. Les vitesses peuvent être évaluées rapidement à l'aide des coefficients d'influence et des valeurs de la circulation de la bande de sillage en cours d'émission et du sillage convecté.

La procédure de normalisation de la répartition de circulation est reprise de nos travaux stationnaires même si, comme nous le verrons, le faible nombre de points nécessaire à la convergence spatiale rend son utilisation très rare. Le test de convergence pour le pas de temps en cours est effectué puis la répartition de circulation est relaxée (voir le paragraphe 2.2.4, page 48).

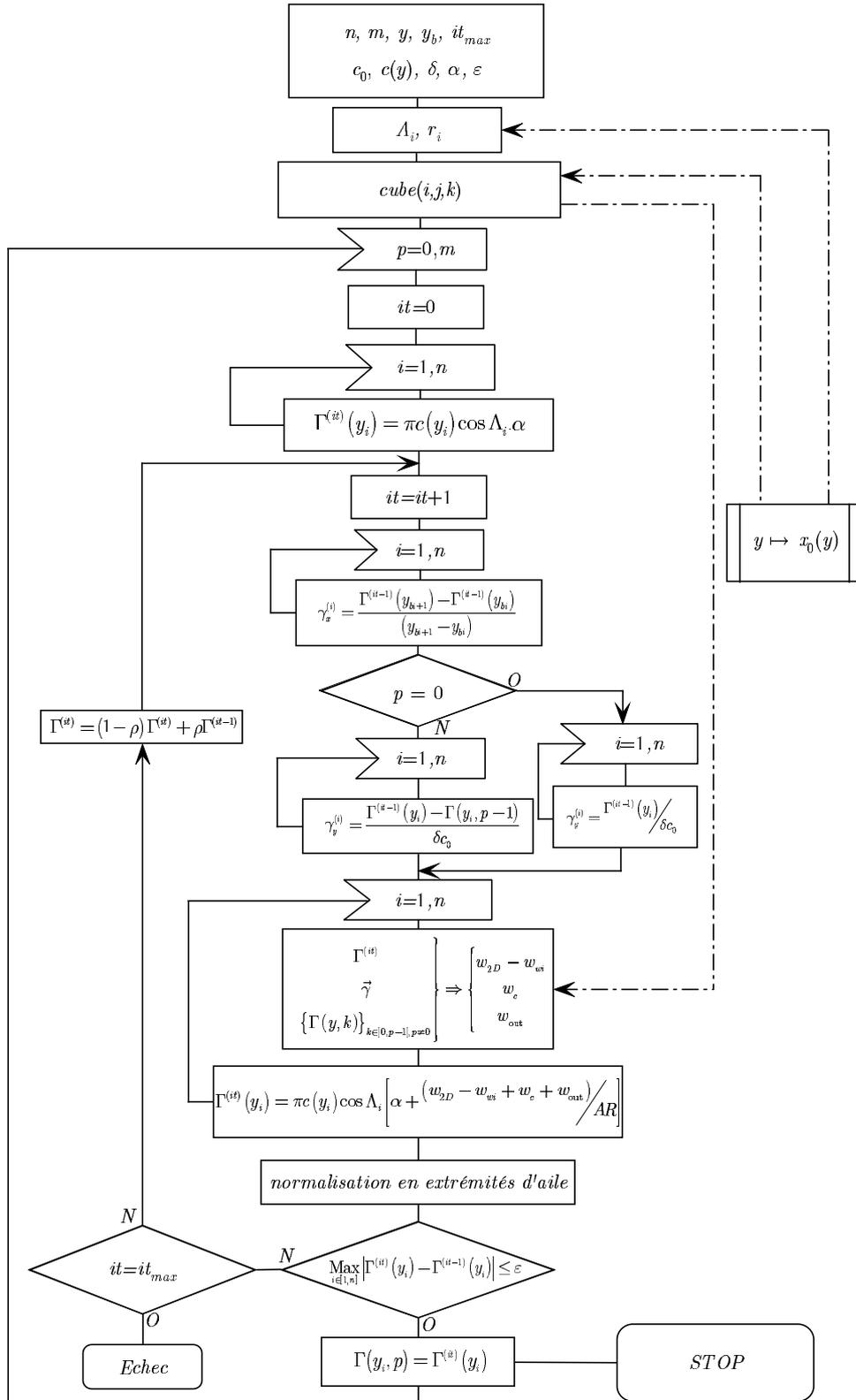


FIG. 3.11 – Schéma algorithmique

3.3 Mise en œuvre quasi-stationnaire

L'approche quasi-stationnaire doit être évoquée du fait de sa large utilisation dans un cadre industriel. Ceci est dû à la relative facilité d'implémentation puisqu'elle consiste à appliquer des lois stationnaires à un problème instationnaire et dans notre cas à utiliser notre approche asymptotique implicite stationnaire pour étudier le comportement instationnaire d'une aile courbe. Certes, la validité d'une telle démarche n'est pas fondée. Néanmoins, pour des mouvements de faible amplitude et de longueur d'onde très grande devant les dimensions de l'obstacle, on peut être amené à considérer qu'à chaque instant les grandeurs caractéristiques sont proches de celles prévues par les théories stationnaires pour des conditions analogues.

Cependant, les démarches quasi-stationnaires de la ligne portante mises en œuvre dans des problèmes instationnaires supposent une variation de la circulation à chaque pas de temps. L'implémentation d'une telle démarche nous permettra d'évaluer l'apport de notre approche réellement instationnaire par rapport à des approches quasi-stationnaires. Par conséquent, l'implémentation proposée ici s'appuie sur le même mouvement de mise en incidence impulsive de l'aile évoqué à la section 3.2.

La démarche quasi-stationnaire s'appuie sur la description formelle stationnaire d'un problème instationnaire. Des mises en œuvre quasi-stationnaires de la théorie de Prandtl pour des ailes droites existent (Devinant, 1998). C'est pourquoi nous avons choisi le formalisme implicite stationnaire courbe et en flèche dont nous avons prouvé l'efficacité au chapitre 2.

Ainsi, nous considérons que la circulation au point y_i et à l'instant t s'écrit :

$$\Gamma(y_i, t) = \pi c(y) \cos \Lambda_i \left(\alpha(y_i) + \alpha^*(y_i, t) \right) \quad (3.28)$$

Comme nous l'avons rappelé dans la section 1.2, le cas particulier d'un formalisme stationnaire suppose que :

$$\gamma_y = \frac{\partial[\varphi]}{\partial x} = 0$$

et il convient alors dans (3.10) de ne conserver que les termes relatifs à la variation de circulation en envergure. L'incidence induite α^* s'écrit :

$$\alpha^*(y_i, t) = \frac{1}{\mathcal{R}} (w_{QS}(y_i, t) + w_c(y_i, t)) \quad (3.29)$$

avec w_c la vitesse complémentaire due à la flèche, à la courbure et à la variation de la circulation en envergure. Par ailleurs (3.29) fait apparaître une autre vitesse induite w_{QS} , pendant quasi-stationnaire de w_0 , qui représente la vitesse induite par le sillage issu de la ligne portante.

La discrétisation du sillage est donc imposée et l'on considèrera que l'expression de w_{QS} est celle donnée par (3.15) pour laquelle $\gamma_y \equiv 0$. L'équation (3.28) devient :

$$\begin{aligned}
\Gamma(y_i, t) = & \pi c(y) \cos \Lambda_i \left[\alpha(y_i) + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p \left(1 - \delta_{0k} \sum_{j=i-1}^{i+1} \delta_{ij} \right) w_{ijk} \right. \right. \\
& - \frac{\gamma_x^{(i-1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i-1}}}^{y_{b_i}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{(y_i - \psi) d\xi d\psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
& - \frac{\gamma_x^{(i+1)}}{4\pi} \int_{y_{b_{i+1}}}^{y_{b_{i+2}}} \int_{x_0(\psi)}^{x_0(\psi)+\delta c_0} \frac{y_i - \psi}{\left[(x_0(y_i) - \xi)^2 + (y_i - \psi)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \\
& + \frac{\gamma_x^{(i)}}{4\pi} \left(\ln \frac{y_{b_{i+1}} - y_i}{y_i - y_{b_i}} - \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \sin \Lambda_i}{u} du - \sin \Lambda_i \cdot \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i)(y_i - y_{b_i})] \right) \\
& + \frac{\gamma_x^{(i)}}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \frac{1}{(y_i - \psi)} \left[1 + \frac{x_0(y_i) - (x_0(\psi) + \delta c_0)}{\sqrt{(x_0(y_i) - (x_0(\psi) + \delta c_0))^2 + (y_i - \psi)^2}} \right] d\psi \\
& + \left[\frac{\Gamma(y_i, t)}{4\pi r(y_i)} + \sin \Lambda_i \frac{\gamma_x^{(i)}}{2\pi} \right] \left[\ln \left(\frac{c(y_i)}{4\mathcal{R}} \right) + \frac{1}{2} \right] + \frac{\Gamma(y_i, t)}{4\pi r(y_i)} \left[1 - \tan^2 \Lambda_i - \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda_i} \right) \right] \\
& \left. + \frac{\gamma_x^{(i)}}{2\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin \Lambda_i}{\cos \Lambda_i} \right| - \sin \Lambda_i \ln \left(\frac{2}{\cos^2 \Lambda_i} \right) \right] \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Nous ne détaillerons pas ici l'implémentation de cette démarche du fait que le termes présents dans (3.30) sont communs à ceux rencontrés dans (3.11) qui régit la répartition de circulation instationnaire et dont l'implémentation fera l'objet d'une description ultérieure.

Il est cependant à noter que, contrairement à certains codes industriels, cette implémentation quasi-stationnaire prend en compte rigoureusement les effets de flèche et de courbure de la ligne portante.

3.4 Résultats et validations

Cette section regroupe les résultats obtenus par nos implémentations quasi-stationnaire et instationnaire. Nous présentons également dans la section qui suit la méthode de validation employée. De nouveau, les validations vont porter sur la répartition de circulation qui constitue le précurseur indispensable à l'utilisation pratique de ces approches.

De plus, nous avons choisi de valider directement nos approches avec la méthode VLM *i.e.* sans produire les résultats données par les méthodes asymptotiques. Cela pour deux raisons :

- la première est que nous présenterons le cas d'une aile en flèche identique à celle présentée en stationnaire (voir page 53) pour laquelle les démarches asymptotiques stationnaires n'ont pu produire un résultat cohérent.
- La seconde renvoie aux résultats présentés à la figure 2.24, page 54, grâce auxquels nous avons démontré que l'approche implicite stationnaire pouvait prendre en compte de fortes flèche et courbure plus précisément que les approches asymptotiques.

3.4.1 La méthode VLM

A l'image de ce que nous proposons en stationnaire, la méthode de validation retenue pour notre méthode instationnaire est une méthode de surface portante instationnaire similaire à celle décrite par Katz et Plotkin (1991) et implémentée par Leroy (1997). Il s'agit de décrire l'aile par une répartition en envergure et en corde d'anneaux tourbillonnaires liés. L'aile de forme en plan quelconque est supposée mince et le sillage est linéarisé afin de considérer qu'il est émis sur la trace du bord de fuite. Ainsi, à tout instant, l'aile et son sillage demeurent dans un seul et même plan.

L'aile est discrétisée en n panneaux en envergure et m en corde. Chaque anneau est accroché au quart avant du panneau et un point de contrôle est positionné au quart arrière dudit panneau. Ainsi, au bord de fuite une rangée d'anneaux chevauche le bord de fuite figurant à chaque instant l'émission du sillage. De plus, à l'instant initial, cette rangée d'anneaux, dont une partie dépasse dans le sillage, constitue le tourbillon de démarrage du sillage. Par conséquent, au bord de fuite, la continuité du saut de potentiel est assurée. Pour que la répartition des anneaux figure l'évolution temporelle du saut de potentiel dans le sillage, on ajoute à chaque pas de temps une rangée d'anneaux et convecte les anneaux déjà émis. L'émission à l'instant t d'une bande de sillage consiste à faire glisser la rangée d'anneaux tourbillonnaires qui se situait sur le bord de fuite à l'instant $t - \Delta t$.

La vitesse induite par un tel système est la somme des vitesses induites par les anneaux liés de l'aile et des vitesses induites par les anneaux libres du sillage. Ces vitesses sont déterminées à l'aide de la

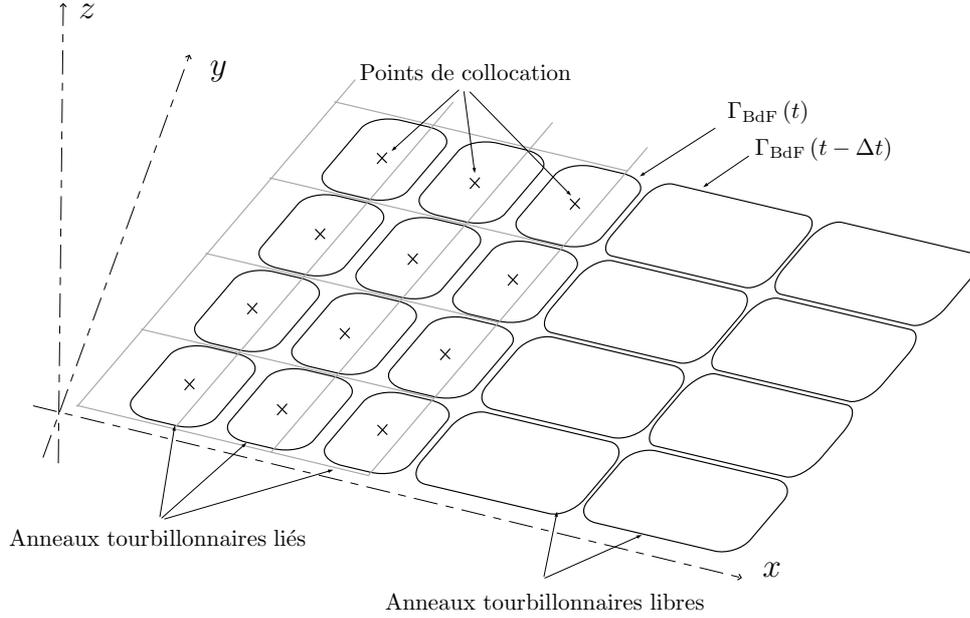


FIG. 3.12 – Modèle en anneaux tourbillonnaires

relation de Biot et Savart. Les inconnues du problème sont les circulations de l'ensemble des tourbillons liés. Celles-ci sont déterminées en vérifiant la condition de glissement en tous les points de collocation. Ceci constitue un système de $n \times m$ équations à $n \times m$ inconnues similaire à celui déjà évoqué en stationnaire.

L'implémentation réalisée par Leroy (1997) suppose une symétrie du problème dans le plan (O, x, z) . Ainsi, nous ne considérerons pas des ailes simplement en dérapage mais des ailes en flèche. De plus, cette implémentation impose un pas de temps correspondant à c_0/m . Dans la suite, nous repérerons systématiquement la discrétisation utilisée sous la forme $n \times m$.

3.4.2 Résultats quasi-stationnaires

Nous proposons, dans cette section, des résultats obtenus avec la démarche quasi-stationnaire de la ligne portante courbe et en flèche que nous comparerons avec des résultats issus de la méthode VLM. La discrétisation retenue lors des calculs avec la méthode de référence est de quarante points en envergure et huit en corde, ce qui assure sa convergence. De plus, ces résultats seront confrontés à notre approche instationnaire à la section 3.4.3.

Notre démarche quasi-stationnaire est appliquée à l'aile parabolique de faible courbure présentée par Guermont (1990) en stationnaire. La ligne moyenne est donnée par la fonction $x_0 : y \mapsto 0,2y^2$, la loi de corde est elliptique et le paramètre d'allongement est $\mathcal{R} = 10$. Le mouvement étudié est une mise en incidence impulsive unitaire et nous proposons quelques résultats pour des pas de temps réduits

s'échelonnant entre une demi-corde et 3 cordes. Deux séries de résultats sont proposées faisant apparaître deux discrétisations spatiales : quarante et cent vingt points en envergure.

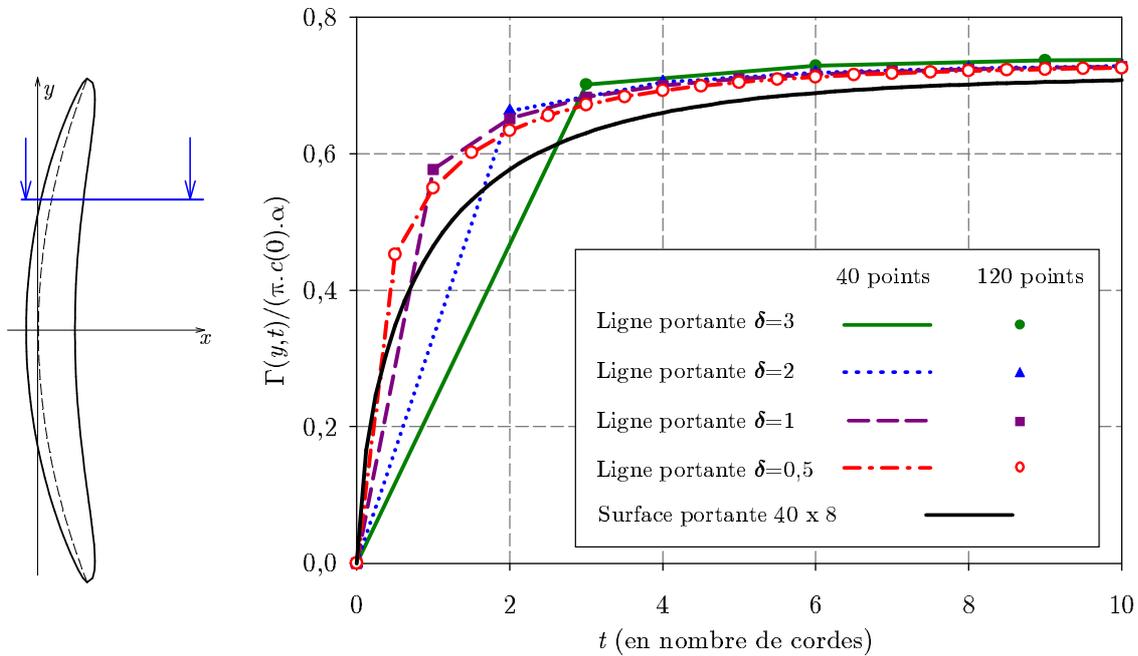


FIG. 3.13 – Évolution quasi-stationnaire de la circulation en $2y/b = 0,525$ sur une aile peu courbée

Comme dans le cas stationnaire, la convergence spatiale est remarquablement atteinte pour un faible nombre de points (moins de quarante points uniformément répartis suffisent à l'obtenir dans le cas présent), la consistance temporelle n'est pas atteinte pour la gamme de pas de temps envisagés. On parle de consistance temporelle lorsque les solutions relatives à différents pas de temps tendent vers un seul et même résultat. Or on remarque ici que, quel que soit le pas de temps considéré, la solution dérive et reste très différente de la solution de référence. Ainsi, même pour des ailes de faible courbure et pour des zones dont la flèche est faible²⁶, la démarche quasi-stationnaire ne converge pas.

Lorsque l'on considère le même cas de calcul avec une aile de plus forte courbure ($x_0 : y \mapsto 0,5y^2$) et présentant des angles de flèche plus élevés, les écarts sont identiques et confirment la mauvaise consistance de cette approche. Malgré cela, on remarque de nouveau (Fig. 3.14) la bonne convergence spatiale pour la même discrétisation en envergure que précédemment en un point de calcul où la flèche atteint 34° .

Le modèle quasi-stationnaire, extension directe de la formulation stationnaire implicite de la ligne portante courbe, ne permet pas d'atteindre la convergence vis-à-vis de la discrétisation temporelle, malgré une description fine du sillage et la prise en compte de la partie finie de la vitesse induite. Cette approche reste donc cantonnée à l'étude des mouvements d'une aile droite à très basses fréquences où elle est parfois

²⁶le point considéré figure 3.13 a une flèche de 15°

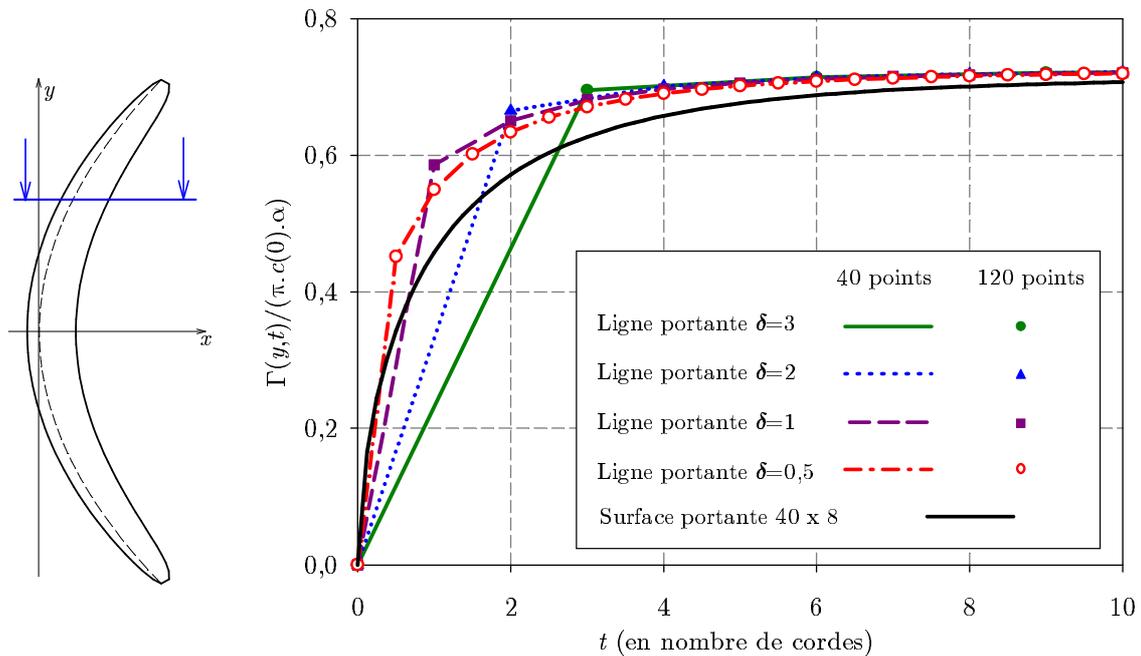


FIG. 3.14 – Évolution quasi-stationnaire de la circulation en $2y/b = 0,525$ sur une aile très courbée

utilisée avec des résultats satisfaisants. Néanmoins, de manière générale, les problèmes instationnaires présentant des effets de courbure et de flèche ne peuvent faire l'objet d'une approche quasi-stationnaire. En ce sens, nous étendons les conclusions de Devinant (1998) qui a montré, dans le cas de l'aile droite, que le principal défaut de ce genre d'approche réside dans l'absence de cohérence temporelle pour des mouvements autres qu'à très basses fréquences.

3.4.3 Résultats instationnaires

Cette section présente quelques résultats issus de notre approche implicite instationnaire de la ligne portante appliquée à des ailes courbes et une aile en flèche. Les résultats présentent l'évolution de la circulation au cours du temps avec le souci propre aux applications envisagées de fournir les paramètres de discrétisation pertinents. Ces résultats permettront de vérifier le point critique de la consistance temporelle de la ligne portante instationnaire en les confrontant à une méthode de surface portante instationnaire (dont nous rappellerons le principe) et ce dans le cas le plus pénalisant de la mise en incidence impulsive. Les ailes étudiées présentent deux lois de courbure (faible et forte) et une loi de flèche (forte) permettant de montrer les aspects originaux de ce travail et le bon comportement de la méthode pour des géométries complexes.

L'aile en flèche

Nous présentons ici des répartitions instationnaires de circulations sur une aile en flèche, c'est-à-dire une ligne brisée dont les branches sont inclinées d'un angle de 30° avec la normale au vent incident. La loi de corde est choisie elliptique en fixant le paramètre d'allongement \mathcal{R} à 10. Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.2.3, la pointe représente une singularité forte incompatible avec les méthodes de ligne portante. Nous avons procédé à un raccordement trigonométrique des deux branches suivant le principe exposé figure 2.14, page 48. Le raccord utilisé ici s'étend sur 10% de l'envergure afin de prouver ce que nous affirmons à l'issue de la section 2.2.4 : notre méthode est applicable à une aile en flèche dès que le raccord est suffisamment étendu pour satisfaire l'hypothèse d'ordre de grandeur de la courbure.

Nous présentons en premier lieu, la répartition de circulation en envergure en fonction du temps (Fig. 3.15), la convergence spatiale est atteinte pour une soixantaine de points répartis uniformément sur l'envergure. Les lignes à t constant représentent la répartition de circulation à chaque instant. Cette figure présente les résultats obtenus pour $\delta = 0,5$. Les premiers instants après la mise en incidence font apparaître le caractère particulier du raccord : la circulation montre une forte augmentation au voisinage du raccord.

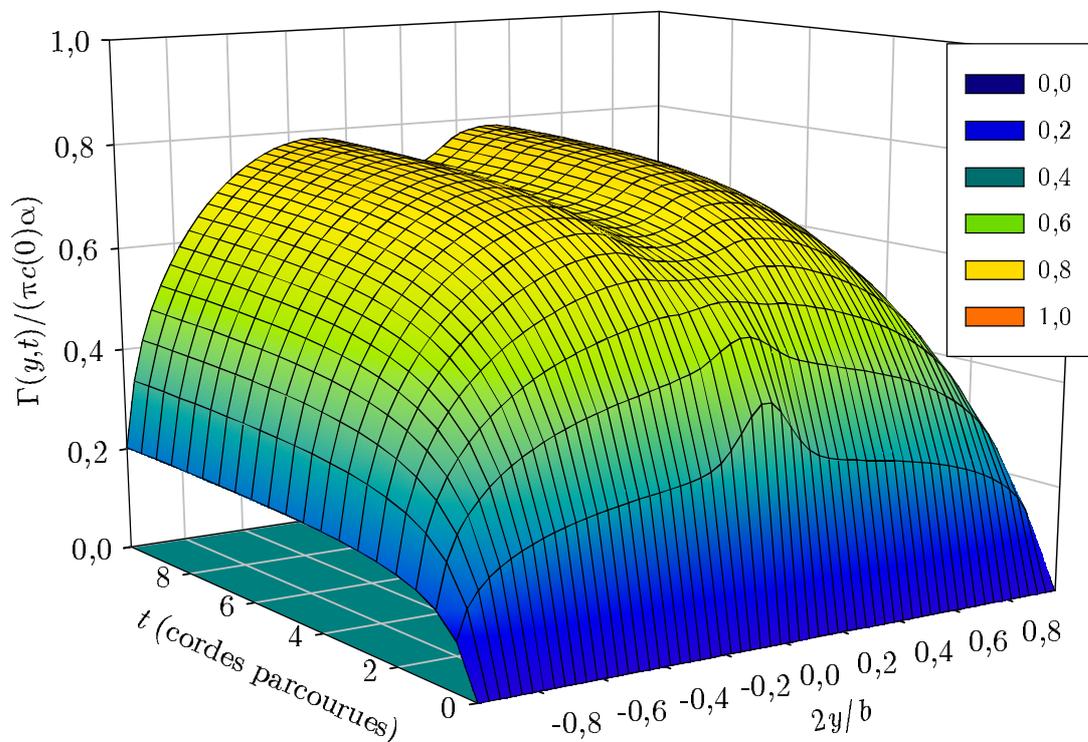


FIG. 3.15 – Évolution de la circulation en envergure et en temps sur une aile en flèche

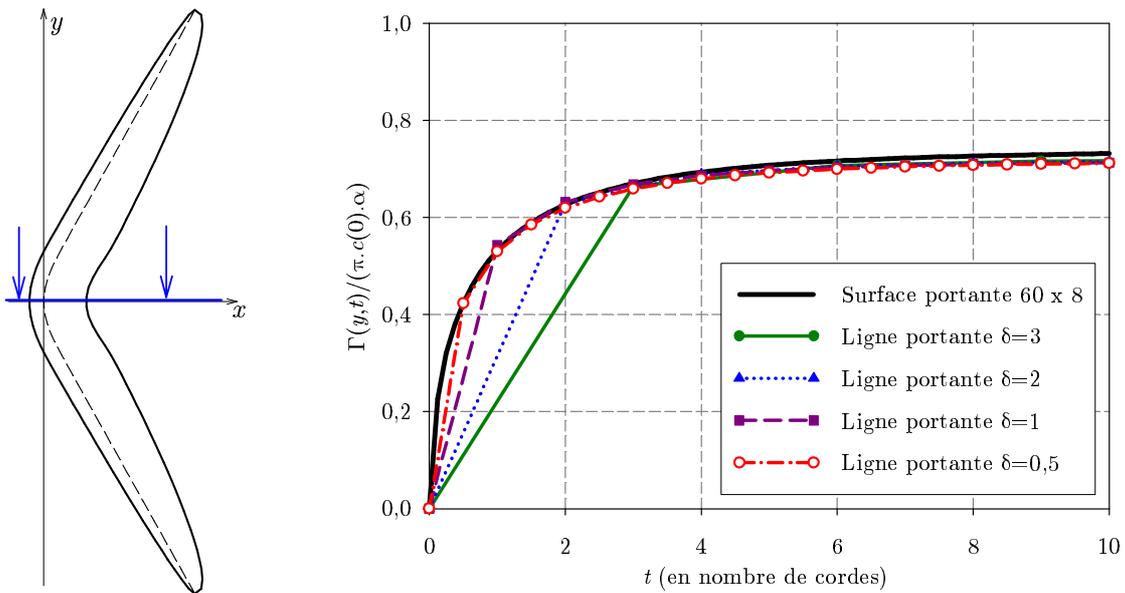


FIG. 3.16 – Évolution de la circulation en $2y/b = 0,01667$ sur une aile en flèche de 30°

Comme le montre la figure suivante (Fig. 3.16), cette forte augmentation de la circulation au voisinage du raccord est également prédite par la méthode de surface portante. L'accord entre les deux méthodes est en ce point quasi-parfait alors que l'angle de flèche local est très faible mais la courbure est significative. Cette figure montre également les résultats pour différentes valeurs du pas de temps (entre $\delta = 3$ et $\delta = 0,5$). La convergence temporelle est atteinte dès la valeur $\delta = 3$, et donc dans ce cas de figure, notre approche se satisfait de pas de temps relativement grands. Ces bons résultats s'expliquent avant tout par l'absence de flèche locale, l'influence de ce terme n'intervient alors qu'à une grande distance par la vitesse induite par le domaine extérieur.

Lorsque l'on s'éloigne du raccord, la flèche intervient au premier ordre : dans le domaine intérieur. On peut constater (Fig. 3.17) un accord tout de même satisfaisant dès que l'on atteint un pas de temps tel que $\delta = 2$. Ce qui reste assez favorable à une détermination rapide de la répartition de circulation instationnaire.

La résolution itérative utilise une relaxation sur les valeurs de la circulation. Le paramètre de relaxation est directement lié à la discrétisation spatiale et atteint $\rho = 0,8$. À chaque pas de temps, le processus converge en quelques dizaines d'itérations. C'est pourquoi les temps de calcul s'échelonnent entre quelques secondes ($\delta = 3$) à quelques dizaines de secondes ($\delta = 0,5$) tout en restant très inférieurs à ceux rencontrés lors du calcul par la méthode de surface portante (plusieurs minutes). Ces temps de calcul s'entendent pour un PC cadencé à 500 MHz.

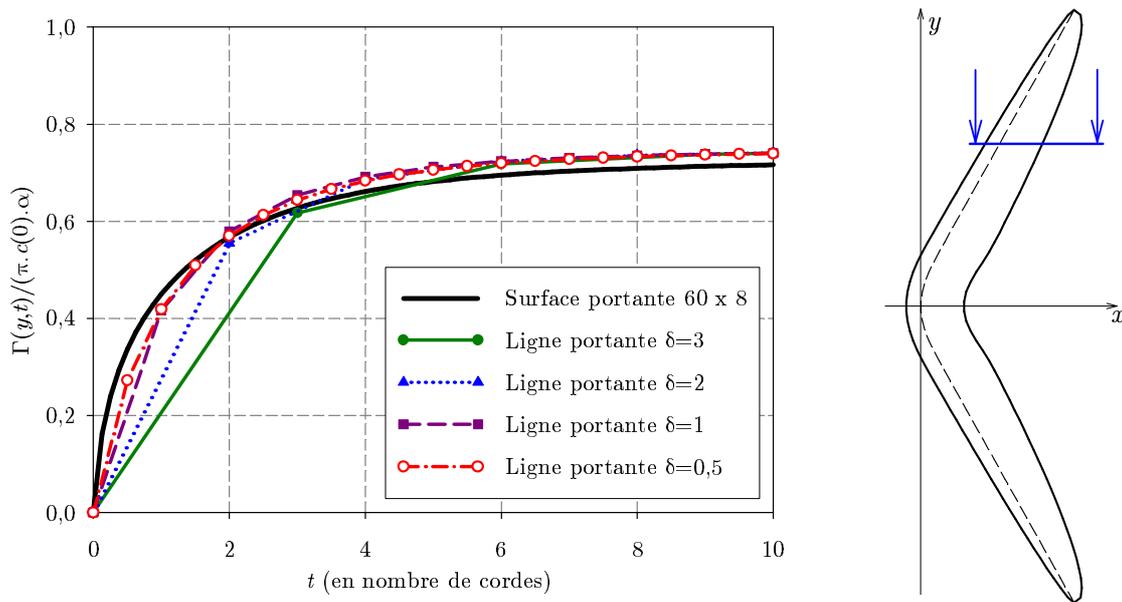


FIG. 3.17 – Évolution de la circulation en $2y/b = 0,55$ sur une aile en flèche de 30°

L'aile courbe

Nous avons choisi dans cette section de présenter deux ailes dont la ligne des foyers est courbe. Pour ces deux ailes, la fonction définissant la ligne portante (\mathcal{L}) est parabolique. La loi de corde est également elliptique et le paramètre d'allongement vaut également 10. Ainsi, la première aile courbe que nous présentons est identique à celle que nous étudions au cours des validations stationnaires et que présente Guermond (1990). L'équation de la ligne est en effet donnée par : $y \mapsto 0,2y^2$. La faible courbure de cette aile présente l'avantage de représenter une aile réaliste, alors que celle que nous présenterons dans la suite est moins représentative de systèmes portants ou propulsifs mais constitue un objet de validation pertinent.

La convergence spatiale est atteinte pour quelques dizaines de points et nous présentons ici une discrétisation spatiale de l'aile en quarante points répartis uniformément. Les trois figures suivantes (Fig. 3.18, 3.19, 3.20) présentent l'évolution au cours du temps de la circulation en trois positions en envergure respectivement voisine du quart, de la moitié et des trois-quart de la demi-envergure. La méthode de surface portante est appliquée à une discrétisation assurant sa convergence soit quarante anneaux en envergure et huit anneaux en corde et un pas de temps correspondant à $\frac{c_0}{8}$.

Le paramètre de relaxation nécessaire à la convergence de la résolution itérative est peu influencé par la diminution du pas de temps mais plutôt par la discrétisation spatiale. Pour un nombre de points tel que celui présenté dans cette section, une valeur $\rho = 0,75$ suffit à atteindre la convergence avec une erreur par pas inférieure à 0,5% à la convergence.

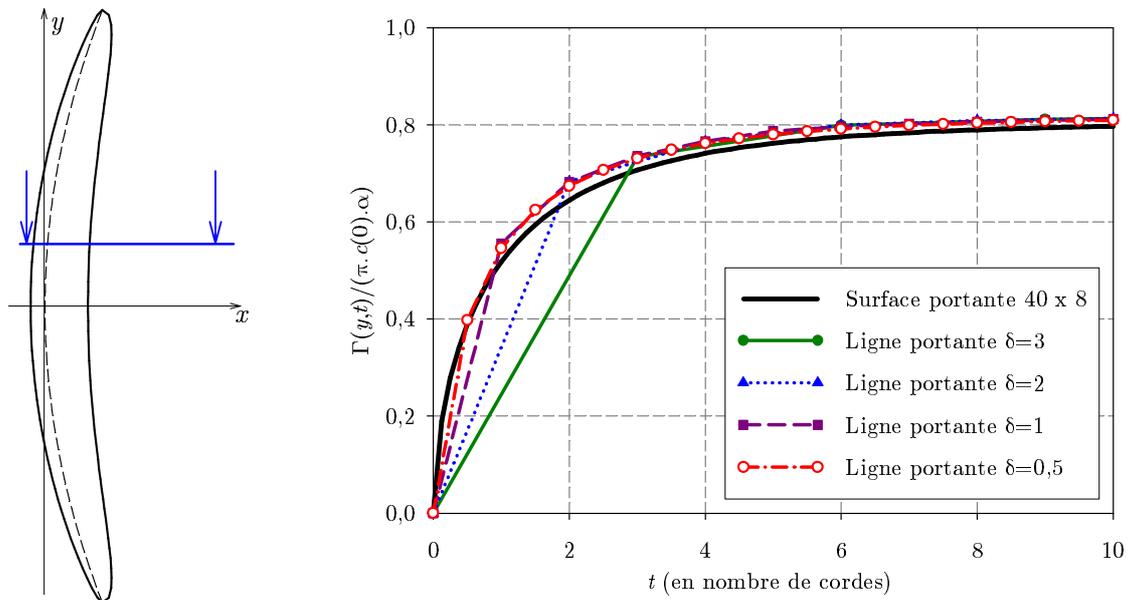


FIG. 3.18 – Évolution de la circulation en $2y/b = 0,225$ sur une aile faiblement courbée

L'aile fortement courbée reprend la forme de la ligne portante de l'aile précédente, avec une courbure plus élevée puisque \mathcal{L} est donnée par la fonction : $y \mapsto 0,5y^2$. Cette aile présente donc une flèche en extrémité d'aile de l'ordre de 45° . Il est par conséquent évident que ce type d'aile constitue un objet parfait pour évaluer la validité de notre approche. Nous présentons ici, pour les mêmes positions en envergure que précédemment, l'évolution de la circulation.

On remarque généralement que la courbure a moins d'influence que la flèche. En effet, la dérivée seconde de la fonction x_0 est constante et donc la flèche évolue linéairement en envergure. Or, cette dernière a tendance à ralentir la convergence temporelle et à retarder la consistance temporelle : on le voit notamment avec la figure 3.17 où la courbure est nulle et la flèche élevée, alors que pour la figure 3.16, la flèche est nulle et la courbure est significative.

Ainsi, dans le cas d'une aile faiblement courbée, quelle que soit la position en envergure considérée la convergence est atteinte pour un pas de temps réduit de l'ordre de deux cordes (Fig. 3.20). La flèche en ce point vaut 16° et bien que significative, elle n'en reste pas moins faible. Alors que, pour une aile fortement courbée, tant que la flèche reste faible (près de 13° pour la figure 3.21), la convergence temporelle est atteinte rapidement ($\delta = 3$), jusqu'à nécessiter un pas de temps de l'ordre d'une corde pour les fortes flèches (près de 36° pour le calcul présenté figure 3.23).

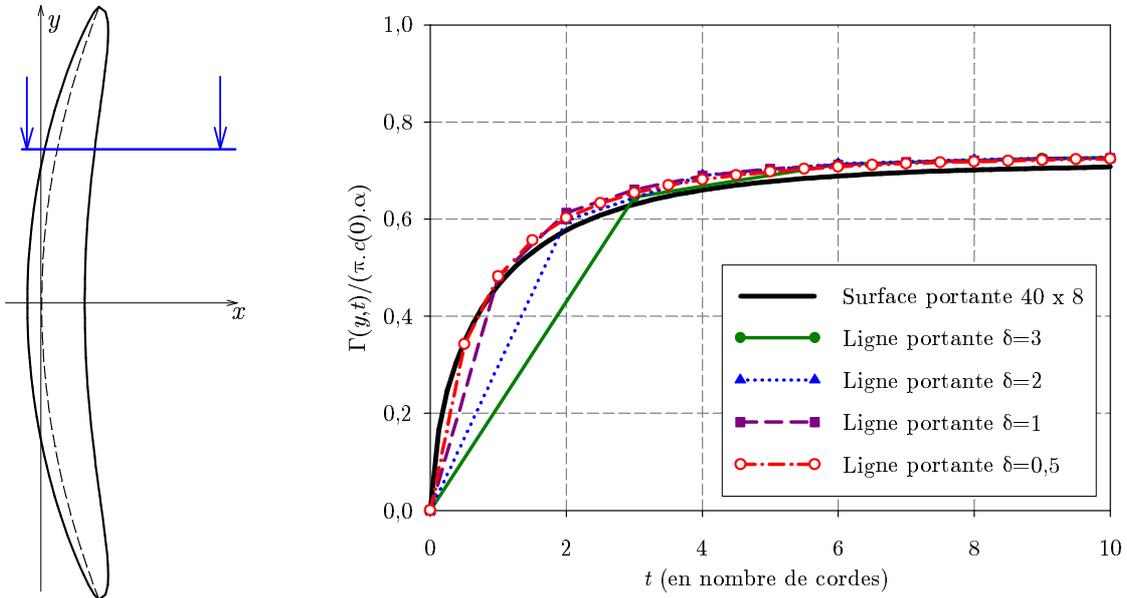


FIG. 3.19 – Évolution de la circulation en $2y/b = 0,525$ sur une aile faiblement courbée

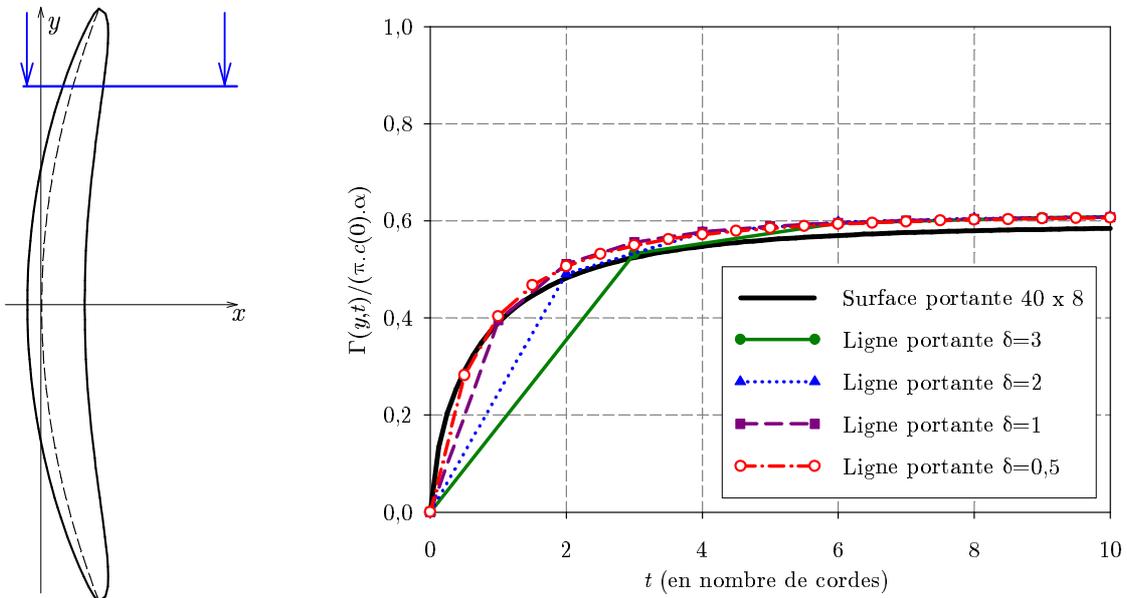
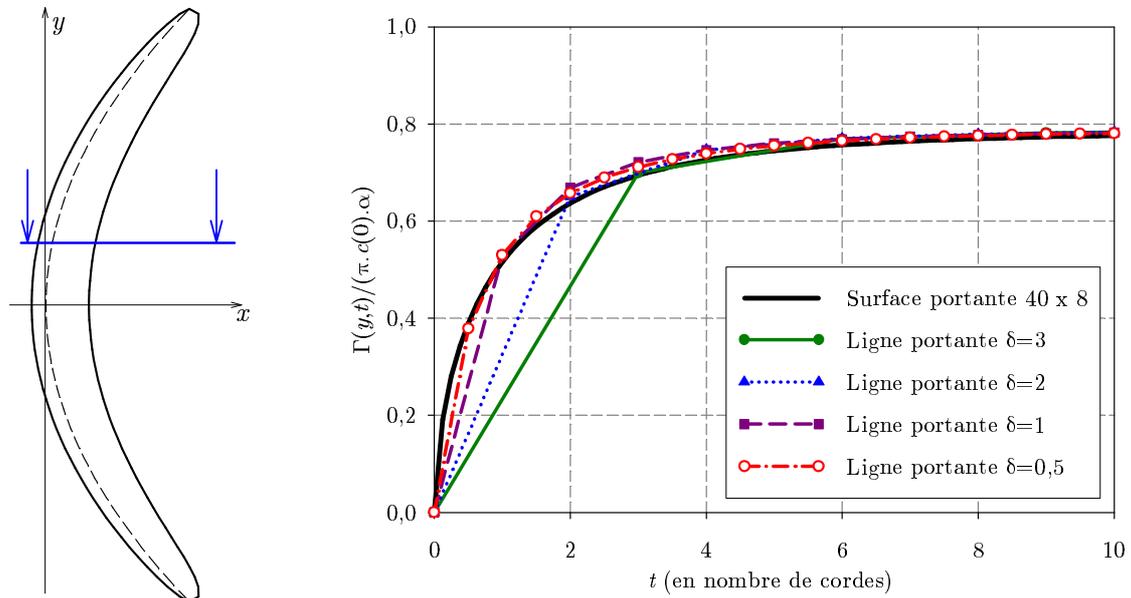
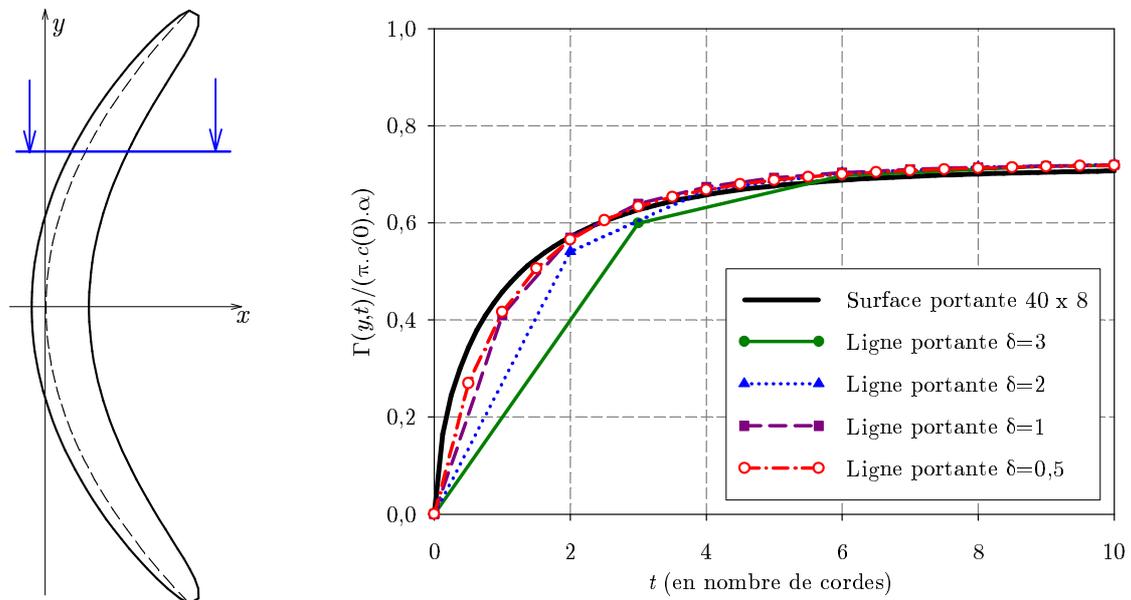


FIG. 3.20 – Évolution de la circulation en $2y/b = 0,725$ sur une aile faiblement courbée

FIG. 3.21 – Évolution de la circulation en $2y/b = 0,225$ sur une aile fortement courbéeFIG. 3.22 – Évolution de la circulation en $2y/b = 0,525$ sur une aile fortement courbée

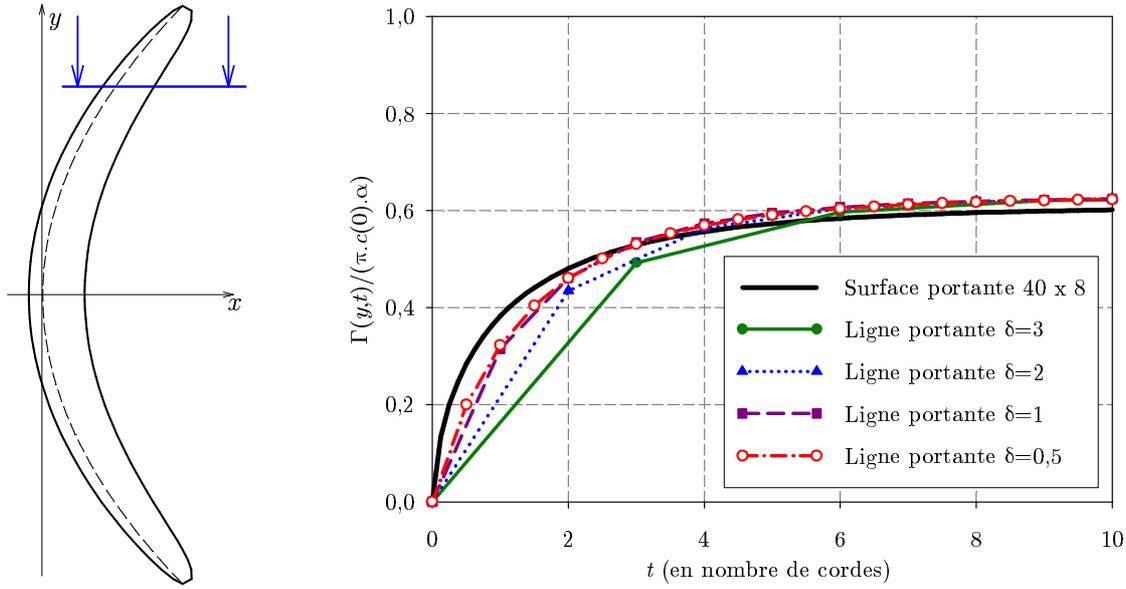


FIG. 3.23 – Évolution de la circulation en $2y/b = 0,725$ sur une aile fortement courbée

L'implémentation instationnaire proposée ici a introduit une hypothèse supplémentaire. Lors du traitement du domaine bi-dimensionnel, nous avons découpé la ligne de sillage en deux zones en faisant apparaître le paramètre Ξ_y tel que $\Xi_y \gg a$ et ainsi : $\Sigma_{2D} = [2a, \Xi_y] \cup [\Xi_y, X(0, t)]$. Puis nous avons fixé ce paramètre tel que $\Xi_y = \delta c_0$ en vue de ne prendre en compte la densité tourbillonnaire que sur la bande de sillage en cours d'émission.

Nous avons donc cherché à constater numériquement la limite de cette approximation en diminuant le paramètre δ largement en dehors de l'hypothèse rappelée ci-dessus. Il apparaît alors pour des valeurs $\delta < 0,25$ ou $\delta < 0,1$ selon les cas, une divergence des évolutions temporelles de la circulation. Ce résultat ne remet pas en cause la méthode puisque dans le premier cas, il vient :

$$\Xi_y = \delta c_0 = \frac{c_0}{4} \approx a$$

Notre hypothèse d'implémentation n'est donc plus vérifiée.

Malgré cette dégradation des résultats pour de très faibles pas de temps, l'implémentation demeure satisfaisante. En effet, Devinant (1998) montre dans le cas de l'aile droite que la valeur du paramètre Ξ_y la plus efficace est celle voisine d'une corde de référence. Nos résultats tendent à confirmer ce résultat pour des ailes de formes en plan complexes. Par ailleurs, notre objectif premier de mise en œuvre industrielle incline naturellement vers des pas de temps grands, choix compatible avec les hypothèses du mouvement dont les longueurs d'onde sont au pire de l'ordre de l'envergure donc grands devant la corde.

Nous pouvons de plus comparer cette approche instationnaire à la méthode quasi-stationnaire issue de notre approche asymptotique implicite de la ligne portante stationnaire. Nous avons déjà remarqué

au chapitre 3.4.2, que l'approche quasi-stationnaire ne permettait pas de retrouver les résultats de notre méthode de référence.

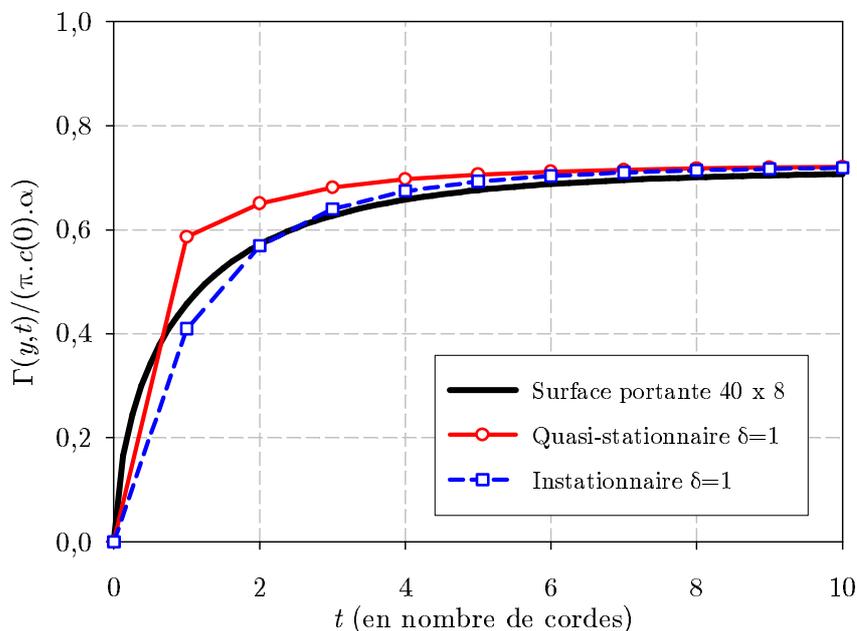


FIG. 3.24 – Méthodes instationnaire *vs.* quasi-stationnaire en $2y/b = 0,525$ sur une aile fortement courbée

La figure 3.24 permet de confronter les deux approches, pour un même pas de temps réduit égal à une corde, à la surface portante dans le cas le plus pénalisant de l'aile fortement courbée. En un point où la flèche et la courbure sont significatives, l'approche quasi-stationnaire ne permet pas de décrire convenablement la zone transitoire alors que l'accord obtenu entre les deux méthodes instationnaires (surface portante et ligne portante implicite courbe) est satisfaisant.

Nos résultats ont montré que suivant la complexité des formes en plan envisagées, des pas de temps de l'ordre de une à deux cordes permettaient d'obtenir des résultats précis. Ainsi, la consistance est assurée pour des pas de temps compatibles avec notre implémentation et les applications futures, avec un accord satisfaisant avec les méthodes de surface portante et des temps de calcul toujours de l'ordre de la dizaine de secondes.



Conclusion

La place incontestable de la méthode de Prandtl en aérodynamique a suscité de nombreux travaux d'extension de la théorie originale. Nous avons à cette occasion constaté que deux types de méthodes de ligne portante se dégagent. Les unes directement inspirées de la théorie de Prandtl ont étendu arbitrairement son domaine de validité pour permettre des implémentations industrielles nombreuses. Ces méthodes implicites se voient appliquées à des formes en plan non droites et à des écoulements non stationnaires sans justification théorique fondée.

Les autres méthodes inspirées notamment par la vision asymptotique que porta Van Dyke sur la ligne portante ont permis de concilier théoriquement courbure, inclinaison, mouvements harmoniques et ligne portante. Néanmoins, ces approches n'ont pas connu d'implémentations du fait de la grande avance prise par celles de la théorie de Prandtl.

L'idée de concilier ces deux approches était donc naturelle pour permettre à des outils industriels de bénéficier des avancées théoriques des méthodes asymptotiques.

L'intégration en partie finie tient une grande place dans ce mémoire et a permis d'explicitier à la fois quelques approches numériques simples de cette quadrature (celle de Delbourgo et Elliott, 1994, semble la plus simple à mettre en œuvre) mais également de donner une régularisation analytique de la vitesse induite par une nappe tourbillonnaire plane, grâce également à la définition analytique de la forme de la ligne portante. La connaissance analytique de la ligne portante n'est pas en soit un frein à l'application future. Il est en effet toujours possible de déterminer une fonction d'interpolation (*e.g.* un spline cubique) qui, par construction, assure la continuité de la dérivée seconde.

Nous avons présenté une implémentation de la théorie asymptotique de la ligne portante issue des travaux de Guermond (1990). Cette numérisation a servi de point de départ à notre méthode implicite asymptotique de la ligne portante stationnaire. Cette méthode rapide donne la possibilité d'évaluer la répartition de circulation sur des ailes de formes en plan complexes avec un accord très satisfaisant avec les méthodes de surfaces portantes pour des ailes de forme en plan complexe. Que ce soit sur des ailes en fort dérapage ou fortement courbées, notre approche a systématiquement produit de meilleurs résultats²⁷ que les approches classiques de la ligne portante issues de la théorie de Prandtl et que les théories asymptotiques.

En cela notre démarche est pleinement justifiée au sens où elle consistait à introduire rigoureusement les effets de la flèche et de la courbure en utilisant les résultats de la théorie asymptotique de Guermond (1990) mais aussi à conserver la formulation implicite de la démarche originale de Prandtl. Nous pensons que cette formulation est responsable de l'accord très satisfaisant avec les méthodes de type surface portante.

Nous avons pu évaluer la répartition de circulation stationnaire sur une aile en flèche, de forme quelconque, en utilisant un raccord trigonométrique. Nous avons à cette occasion montré la bonne tenue de notre méthode et les moins bons résultats obtenus par les approches tant asymptotiques que classiques pour ce type de géométrie. Nous avons également montré les écarts avec cette dernière dans le cas d'une pale réelle en rotation, sur la base de calculs de l'ONERA. Ce travail a montré les difficultés mais aussi les possibilités d'adaptation des méthodes de lignes portantes (quelles qu'elles soient) à ce type de configuration.

Cette première étape a permis le développement d'une méthode instationnaire. Celle-ci s'est appuyée sur les résultats théoriquement fondés de Sellier (1990). Ces travaux ont, en effet, établi une théorie asymptotique instationnaire générale de la ligne portante. Nous avons repris sa décomposition asymptotique du domaine constitué par l'aile et son sillage puis évalué la vitesse induite par chacun des sous-domaines dans le cas des mouvements à basse fréquence couramment rencontrés dans le domaine des hélicoptères. Pour certaines, ces vitesses font apparaître des termes très similaires à ceux présents dans la méthode stationnaire. De même, le recours à l'intégration au sens des parties finies d'Hadamard est indispensable pour évaluer certaines de ces vitesses induites.

Le problème intérieur est envisagé, sous l'angle bi-dimensionnel, à l'aide de la théorie linéarisée du profil en écoulement instationnaire alors que le problème extérieur fait apparaître classiquement une nappe de doublets ainsi qu'une vitesse induite par la variation de la circulation en envergure, la flèche et la courbure locales de la ligne portante.

²⁷en comparaison avec la méthode de surface portante

Le formalisme retenu, largement inspiré par l'équation intégro-différentielle de Prandtl, est fort différent de la théorie de Sellier puisque la répartition de circulation sur l'aile est déterminée à l'aide d'une équation implicite où l'inconnue du problème intervient également dans le calcul des vitesses induites.

Une implémentation de cette démarche instationnaire est proposée et fait apparaître une représentation mixte du sillage avec une description fine de celui-ci par une répartition surfacique de doublets à axes normaux variant linéairement au plus près du point de calcul. Pour les zones du sillage situées à une plus grande distance, notre description du sillage se satisfait de doublets constants. Cette mise en place a permis, pour une précision satisfaisante, de conserver le principal atout des méthodes de ligne portante à savoir leur rapidité.

Nous avons considéré plusieurs ailes très différentes pour évaluer la validité de l'approche. La méthode de validation retenue est une méthode VLM instationnaire. De plus, une mise en œuvre quasi-stationnaire a été implémentée et permet de situer les résultats des approches industrielles qui, en grande majorité, adoptent un formalisme quasi-stationnaire. Les résultats obtenus par l'implémentation instationnaire montrent un accord satisfaisant avec la méthode de référence. La convergence temporelle est obtenue pour des pas de temps grands, très favorables à une exécution rapide et cohérent avec le domaine fréquentiel des mouvements considérés. La convergence spatiale est, elle aussi, atteinte pour des discrétisations assurant la rapidité d'exécution.

La comparaison instationnaire – quasi-stationnaire, montre la faiblesse de cette dernière approche. Elle ne permet pas de retrouver les résultats de référence et montre un manque de convergence temporelle. Ceci permet de justifier pleinement la nécessité du développement d'une méthode implicite réellement instationnaire pour la ligne portante courbe et en flèche.

C'est certainement une des raisons pour lesquelles les méthodes de calcul utilisées pour la prévision du comportement aéro-acoustique de rotors d'hélicoptère ne permettent pas de prédire convenablement la réduction de bruit émis par de nouvelles géométries de pales. Ce travail de thèse apporte, nous l'espérons, les éléments nécessaires à la prise en compte rigoureuse de la courbure et de la flèche de ces pales.

En particulier, l'évaluation rigoureuse de la vitesse induite en partie finie constitue un point important à mettre en œuvre. Ce formalisme permet d'améliorer le calcul numérique de certaines intégrales singulières, ce qui nécessite la transposition dans les codes de calcul industriels de la description du sillage proposé dans ce travail.

Nous nous sommes attachés, ici, à la détermination la plus précise des vitesses induites et de la circulation au cours du temps. Dans l'optique de développements industriels, il sera nécessaire d'adjoindre à notre approche un modèle bi-dimensionnel intérieur plus évolué (*e.g.* de type Theodorsen) en vue du

calcul des efforts instationnaires dans chaque section d'une aile courbe. Ce point est présenté, dans le cas de la ligne portante droite instationnaire, par Le Bouar-Coppens (1999) où l'interprétation des différents termes constitutifs de la circulation permet d'exprimer les efforts instationnaires.

C'est pourquoi, dans le cadre d'une collaboration entre l'ONERA et le Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique, une thèse en cours a pour objet l'implantation de ces améliorations dans un code de calcul ONERA, et l'évaluation de leur influence sur la géométrie du sillage et le bruit rayonné, constituant une perspective intéressante du travail de thèse présenté dans ce mémoire.

Partie finie de la vitesse induite stationnaire

Nous allons nous intéresser ici au coeur du calcul de notre ligne portante, le calcul en partie finie de w_0 . Comme nous l'avons dit à la section 1.4.2, nous avons privilégié la détermination analytique des parties finies au sens d'Hadamard à leurs approximations numériques. Ceci est essentiellement dû à deux facteurs : le premier est la complexité des quadratures généralement rencontrées qui pour les plus abordables d'entre-elles (et c'est le second facteur) convergent très lentement (voir §1.4.3 et Fig. 1.7).

Or nous avons vu apparaître de nombreuses intégrales en partie finie notamment dans le cas stationnaire où la formulation de la vitesse induite par la ligne portante sur elle-même (2.8) impose ce formalisme. Il devient alors nécessaire d'évaluer la vitesse induite par le panneau de doublets semi-infini issu du segment S_i en un point $M_0(y_i, x_0(y_i))$ de S_i :

$$w_{PF}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} \frac{\Gamma(\eta)}{(\eta - y_i)^2} \left(1 - \frac{x_0(\eta) - x_0(y)}{\sqrt{(x_0(\eta) - x_0(y))^2 + (\eta - y_i)^2}} \right) d\eta \quad (\text{A.1})$$

Le processus utilisé est issu de la définition pratique de la partie finie au sens d'Hadamard évoqué au §1.4.2. Classiquement le segment d'intégration S_i se limite à $[y_{b_i}, y_{b_{i+1}}]$ (Fig. 2.2, page 36) et le point de collocation y_i est le milieu de S_i . On considère alors la variable $u = \eta - y$ et la fonction auxiliaire :

$$f_y(u) = \frac{x_0(u + y_i) - x_0(y_i)}{\sqrt{(x_0(u + y_i) - x_0(y_i))^2 + u^2}}$$

La vitesse w_{PF} s'écrit :

$$w_{PF}(y_i) = \frac{1}{4\pi} \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{\Gamma(y_i + u)}{u^2} (1 - f_y(u)) du \quad (\text{A.2})$$

La fonction $f_y(u)$ possède la propriété *a priori* contraignante d'être discontinue en y_i (Fig. A.1). Or comme nous l'avons déjà dit, la singularité étant à l'intérieur du segment d'intégration et non pas au bord de celui-ci, il est indispensable de considérer l'intégration à droite et à gauche du point singulier. Malgré cette discontinuité, cette fonction peut faire l'objet de raccordements par continuité en y_i par

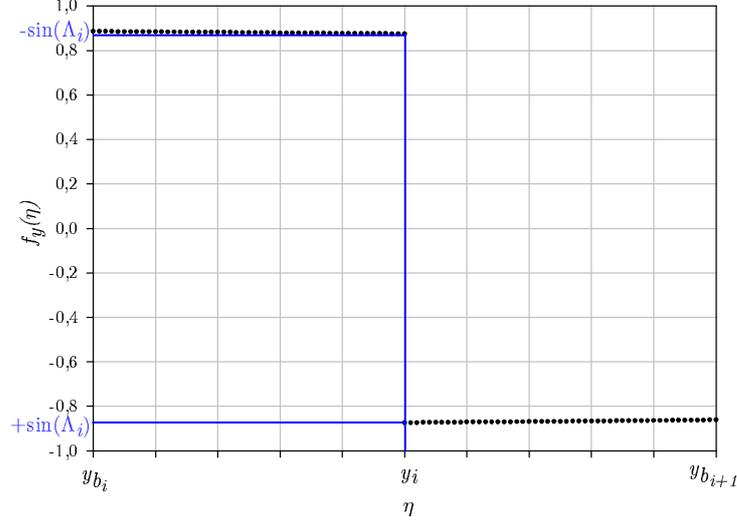


FIG. A.1 – Allure de la fonction $f_y(\eta)$

valeurs inférieures et supérieures. En effet, comme le rappelle Guermond (1990) :

$$f_y(u) = \text{sgn}(u) \cdot \left(\sin \Lambda_i + \frac{u}{2.r_i} \right) + O(u^2)$$

donc la limite à gauche (resp. à droite) de y_i de cette fonction existe et vaut $-\sin \Lambda_i$ (resp. $+\sin \Lambda_i$). Nous en venons donc au calcul analytique non pas d'une mais de deux intégrales en partie finie pour chaque point de calcul y_i suivant la démarche présentée au §1.4.2. On pose alors $g_y(u)$ la fonction définie par morceaux par $f_y(u)$ et ses prolongements continus en y_i . L'équation (A.2) peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} w_{PF}(y_i) &= \frac{1}{4\pi} \int_{y_{b_i}-y_i}^{y_{b_{i+1}}-y_i} \frac{\Gamma(y_i+u) - [\Gamma(y_i) + u\Gamma'(y_i)]}{u^2} (1 - g_y(u)) du \\ &+ \frac{\Gamma(y_i)}{4\pi} \int_{y_{b_i}-y_i}^{y_{b_{i+1}}-y_i} \frac{(1 - g_y(u))}{u^2} du + \frac{\Gamma'(y_i)}{4\pi} \int_{y_{b_i}-y_i}^{y_{b_{i+1}}-y_i} \frac{(1 - g_y(u))}{u} du \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La première intégrale est régulière car :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Gamma(y_i+u) - [\Gamma(y_i) + u\Gamma'(y_i)]}{u^2} = \frac{\Gamma''(y_i)}{2}$$

les deux autres sont à prendre en partie finie au sens d'Hadamard et en valeur principale de Cauchy.

Rappelons ici que nous avons choisi d'évaluer $w_{PF}(M_0)$ pour un panneau dont la circulation varie linéairement selon y . Par conséquent, la première intégrale dans l'équation (A.3) est nulle. Posons les

deux notations suivantes :

$$I_{VP} = \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{1 - g_y(u)}{u} du \quad \text{et} \quad I_{PF} = \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{1 - g_y(u)}{u^2} du$$

On modifie la première sous la forme :

$$I_{VP} = \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{du}{u} - \int_{y_{b_i} - y_i}^0 \frac{g_y(u) du}{u} - \int_0^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) du}{u}$$

D'après l'équation (1.28), on peut écrire :

$$I_{VP} = \ln \frac{y_{b_{i+1}} - y_i}{y_i - y_{b_i}} - \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \sin \Lambda_i}{u} du - \sin \Lambda_i \cdot \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i) (y_i - y_{b_i})] \quad (\text{A.4})$$

Intéressons nous à l'intégrale en partie finie I_{PF} . On écrit en premier lieu :

$$I_{PF} = \underbrace{\int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{du}{u^2}}_{I_{PF_1}} - \underbrace{\int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u)}{u^2} du}_{I_{PF_2}}$$

Immédiatement :

$$I_{PF_1} = \frac{1}{y_{b_i} - y_i} - \frac{1}{y_{b_{i+1}} - y_i}$$

Pour la seconde intégrale, il convient de retourner à la définition que nous donnions en (1.33) page 29 :

$$\begin{aligned} I_{PF_2} &= \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \left(\sin \Lambda_i + \frac{u}{2r_i} \right)}{u^2} du \\ &+ \sin \Lambda_i \left(- \int_{y_{b_i} - y_i}^0 \frac{du}{u^2} + \int_0^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{du}{u^2} \right) + \frac{1}{2r_i} \left(- \int_{y_{b_i} - y_i}^0 \frac{du}{u} + \int_0^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{du}{u} \right) \\ &= \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \left(\sin \Lambda_i + \frac{u}{2r_i} \right)}{u^2} du \\ &- \sin \Lambda_i \left(\frac{1}{y_{b_i} - y_i} + \frac{1}{y_{b_{i+1}} - y_i} \right) + \frac{1}{2r_i} \ln [(y_i - y_{b_i}) (y_{b_{i+1}} - y_i)] \end{aligned}$$

Soit, finalement :

$$\begin{aligned} I_{PF} &= \frac{1}{y_{b_i} - y_i} - \frac{1}{y_{b_{i+1}} - y_i} - \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \left(\sin \Lambda_i + \frac{u}{2r_i} \right)}{u^2} du \\ &+ \sin \Lambda_i \left(\frac{1}{y_{b_i} - y_i} + \frac{1}{y_{b_{i+1}} - y_i} \right) - \frac{1}{2r_i} \ln [(y_i - y_{b_i}) (y_{b_{i+1}} - y_i)] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

On peut alors écrire la vitesse induite $w_{PF}(y_i)$ dans le cas général :

$$\begin{aligned} w_{PF}(y_i) &= \frac{1}{4\pi} \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{\Gamma(y_i + u) - [\Gamma(y_i) + u\Gamma'(y_i)]}{u^2} (1 - g_y(u)) du \\ &+ \frac{\Gamma(y_i)}{4\pi} \left[\frac{1}{y_{b_i} - y_i} - \frac{1}{y_{b_{i+1}} - y_i} - \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \left(\sin \Lambda_i + \frac{u}{2r_i} \right)}{u^2} du \right. \\ &+ \left. \sin \Lambda_i \left(\frac{1}{y_{b_i} - y_i} + \frac{1}{y_{b_{i+1}} - y_i} \right) - \frac{1}{2r_i} \ln [(y_i - y_{b_i}) (y_{b_{i+1}} - y_i)] \right] \\ &+ \frac{\Gamma'(y_i)}{4\pi} \left[\ln \frac{y_{b_{i+1}} - y_i}{y_i - y_{b_i}} - \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \sin \Lambda_i}{u} du - \sin \Lambda_i \cdot \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i) (y_i - y_{b_i})] \right] \end{aligned}$$

ainsi que le cas particulier qui nous intéresse (lorsque Γ est une fonction linéaire de y) :

$$\begin{aligned}
 w_{PF}(y_i) = & \frac{\Gamma(y_i)}{4\pi} \left[\frac{1}{y_{b_i} - y_i} - \frac{1}{y_{b_{i+1}} - y_i} - \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \left(\sin \Lambda_i + \frac{u}{2r_i}\right)}{u^2} du \right. \\
 & \left. + \sin \Lambda_i \left(\frac{1}{y_{b_i} - y_i} + \frac{1}{y_{b_{i+1}} - y_i} \right) - \frac{1}{2r_i} \ln [(y_i - y_{b_i})(y_{b_{i+1}} - y_i)] \right] \\
 & + \frac{\Gamma'(y_i)}{4\pi} \left[\ln \frac{y_{b_{i+1}} - y_i}{y_i - y_{b_i}} - \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{g_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \sin \Lambda_i}{u} du - \sin \Lambda_i \cdot \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i)(y_i - y_{b_i})] \right]
 \end{aligned}$$

Vitesse induite par une répartition surfacique γ_y

Nous proposons ici le détail des calculs menant à la détermination de la vitesse induite par un panneau dont la densité tourbillonnaire γ_y est constante. Ce panneau semi-infini est délimité par la courbe \mathcal{L} définie par la fonction $y \mapsto x_0(y)$ avec $y \in \mathcal{S}_i = [y_{b_i}, y_{b_{i+1}}]$.

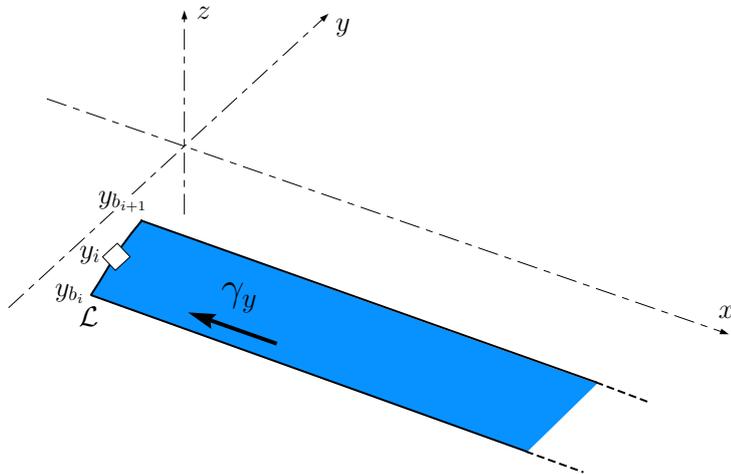


FIG. B.1 – Élément tourbillonnaire de densité constante

D'après Bisplinghoff *et al.* (1955), la vitesse induite par cet élément au point $y_i \in \mathcal{S}_i$ s'écrit :

$$w(y_i) = \frac{\gamma_y}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)}^{+\infty} \frac{\xi - x_0(y_i)}{[(\xi - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\psi \quad (\text{B.1})$$

Ce qui, en posant $u = \xi - x_0(y_i)$ conduit à :

$$\begin{aligned} w(y_i) &= \frac{\gamma_y}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \int_{x_0(\psi)-x_0(y_i)}^{+\infty} \frac{u}{\left[(u)^2 + (\psi - y_i)^2\right]^{\frac{3}{2}}} du d\psi \\ &= \frac{\gamma_y}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \left[-\frac{1}{\sqrt{u^2 + (\psi - y_i)^2}} \right]_{x_0(\psi)-x_0(y_i)}^{+\infty} d\psi \\ &= \frac{\gamma_y}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \frac{d\psi}{\sqrt{(x_0(\psi) - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2}} \end{aligned}$$

En vue d'appliquer la définition (1.27), il est nécessaire de faire apparaître une fonction régulière au numérateur et la singularité au dénominateur. On pose alors :

$$w(y_i) = \frac{\gamma_y}{4\pi} \int_{y_{b_i}}^{y_{b_{i+1}}} \frac{1}{\psi - y_i} \times \frac{\psi - y_i}{\sqrt{(x_0(\psi) - x_0(y_i))^2 + (\psi - y_i)^2}} d\psi$$

et en posant :

$$u = \psi - y_i \quad \text{et} \quad h_y(u) = \frac{u}{\sqrt{(x_0(u + y_i) - x_0(y))^2 + u^2}}$$

il vient :

$$w(y_i) = \frac{\gamma_y}{4\pi} \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{h_y(u)}{u} du \quad (\text{B.2})$$

Cette écriture permet de constater la nature de l'intégrale. La fonction $h_y(u)$ est continue par morceaux et discontinue en 0. Néanmoins, cette fonction est prolongeable par continuité en 0.

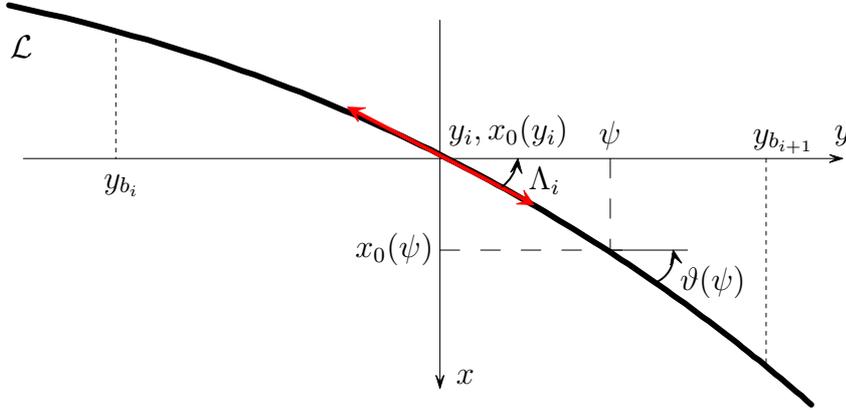


FIG. B.2 – Configuration locale de la ligne portante

La figure B.2 montre en effet que $h_y(u) = \text{sgn}(u) \cdot \cos \Lambda_i + O(u)$. Donc les limites à gauche et à droite de la valeur $u = 0$ existent et constituent les prolongements par continuité. C'est pourquoi, l'intégrale dans (B.2) est à considérer en valeur principale. Alors :

$$w(y_i) = \frac{\gamma_y}{4\pi} \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{h_y(u) - \text{sgn}(u) \cdot \cos \Lambda_i}{u} du + \frac{\gamma_y}{4\pi} \cos \Lambda_i \left(\int_{y_{b_i} - y_i}^0 \frac{-du}{u} + \int_0^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{du}{u} \right)$$

et finalement :

$$w(y_i) = \frac{\gamma_y}{4\pi} \int_{y_{b_i} - y_i}^{y_{b_{i+1}} - y_i} \frac{h_y(u) - \operatorname{sgn}(u) \cdot \cos \Lambda_i}{u} du + \frac{\gamma_y \cdot \cos \Lambda_i}{4\pi} \ln [(y_{b_{i+1}} - y_i)(y_i - y_{b_i})] \quad (\text{B.3})$$



Bibliographie

A.R. AHMADI, S.E. WIDNALL (1985).

Unsteady lifting-line theory as a singular perturbation problem.

J. Fluid Mech. **153**, 59–81.

H. ASHLEY, J. LANDHAL (1965).

Aerodynamics of wings and bodies.

Addison-Wesley Publishing, Massachusetts.

R.I. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, R.L. HALFMAN (1955).

Aeroelasticity,

Addison-Wesley, Reading, MA.

W.G. BOUSMAN, C. YOUNG, N. GILBERT, F. TOULMAY, W. JOHNSON, M.J. RILEY (1989).

Correlation of Puma airloads-lifting line and wake calculation.

In *15th European Rotorcraft Forum proceedings*, Amsterdam.

B. CANTALOUBE, C. REHBACH (1986).

Calcul des intégrales de la méthode des singularités.

La recherche aérospatiale **1**, 15–22.

H.K. CHENG (1975).

On lifting line theory in unsteady aerodynamics.

Tech. Rep. 133, USCAE, Dept. of Aero. Engin.

H.K. CHENG (1978).

Lifting line theory of oblique wings.

AIAA Journal **16**, 1211–1223.

- H.K. CHENG, S.Y. MENG (1980).
The oblique wing as a lifting line problem in transonic flow
J. Fluid Mech. **97**, 531–556.
- H.K. CHENG, L.E. MURILLO (1984).
Lunate-tail swimming propulsion as a problem of curved lifting-line in unsteady flow.
J. Fluid Mech. **143**, 325–350.
- J. COIRIER (1999).
Méthode des développements asymptotiques raccordés
In *Cours de D.E.A. d'Aérodynamique et Mécanique des Fluides, Combustion, Thermique*, Poitiers.
- M. COSTES, G. COPPENS, PH. DEVINANT, A. LEROY (1998).
Computation of helicopter rotor wake using a high order panel method.
In *24th European Rotorcraft Forum proceedings*, Marseille.
- G. COUCHET (1976).
Les profils en aérodynamique instationnaire et la condition de Joukowski.
Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris
- D. DELBOURGO, D. ELLIOTT (1994).
On the approximate evaluation of Hadamard finite-part integrals.
IMA J. Numer. Anal. **14**, 485–500.
- PH. DEVINANT (1998).
An approach for unsteady lifting line time-marching numerical computation.
Int. J. Num. Meth. in Fluids **26**, 177–197.
- PH. DEVINANT, T. GALLOIS (2001).
Calculs de répartitions de circulation sur plusieurs rotors par une méthode de ligne portante stationnaire
Rapport du contrat ONERA - Université d'Orléans 14036-DA-CDES
- PH. DEVINANT, T. GALLOIS (2002).
Swept and curved wings : a numerical approach based on generalized lifting-line theory
Comp. Mech. **29**, 322–331.
- PH. DEVINANT, A. LEROY ET M. MUDRY (1999).
Unsteady 3D non linear Kutta-Joukowski condition for thin lifting surfaces.
Comp. Mech. **24**, 138–147.
- D. ELLIOTT (1993).
An asymptotic analysis of two algorithms for certain Hadamard finite-part integrals.
IMA J. of Numer. Anal. **13**, 445–462.
- F. ERDOGAN, G.D. GUPTA, T.S. COOK (1973).
Numerical solution of singular integral equations.
Mechanics of Fracture **1**, 368–425.

-
- D. EUVRARD (1984).
Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur. Troisième édition
Masson, Paris.
- K.O. FRIEDRICHS (1966).
Special topics in fluid dynamics.
Gordon and Breach, New York.
- T. GALLOIS, PH. DEVINANT (2001).
Une méthode de calcul pour la ligne portante courbe et en flèche issue de la théorie généralisée.
In *Actes du 16^{ème} Congrès Français de Mécanique*, Nancy.
- T. GALLOIS, PH. DEVINANT (2003).
Une méthode de calcul pour la ligne portante instationnaire courbe et en flèche.
In *Actes du 17^{ème} Congrès Français de Mécanique*, Nice.
- J.L. GUERMOND (1990).
A generalized lifting-line theory for curved and swept wings.
J. Fluid Mech. **211**, 497–513.
- J.L. GUERMOND, A. SELIER (1991).
A unified unsteady lifting-line theory.
J. Fluid Mech. **229**, 427–451.
- J.P. GUIRAUD, G. SLAMA (1981).
Sur la théorie asymptotique de la ligne portante en régime incompressible oscillatoire.
La Recherche Aérospatiale **1**, 1–6.
- J. HADAMARD (1932).
Lectures on Cauchy's problem in linear differential equation.
Dover Publication, New York.
- J.L. HESS (1969).
Calculation of potential flow about three-dimensional lifting bodies.
Douglas Aircraft Company, AD 699615.
- S.F. HOERNER (1975).
Fluid-Dynamic Lift.
Hoerner Fluid Dynamics, Bakersfield.
- E.C. JAMES (1975).
Lifting line theory for an unsteady wing as a singular perturbation problem.
J. Fluid Mech. **70**, 753–771.

- J. KATZ, A. PLOTKIN (1991).
Low-speed Aerodynamics - From Wing Theory to Panel Methods.
McGraw-Hill International Editions.
- A.M. KORSUNSKY (1997).
Gauss-Jacobi quadratures for hypersingular integrals.
In *First UK Conference on Boundary Integral Methods proceedings*, 164–177.
- G. LE BOUAR-COPPENS (1999).
Méthode pas à pas en temps pour l'aérodynamique instationnaire des rotors d'hélicoptères.
Thèse de doctorat, Université d'Orléans.
- A. LEROY (1997).
Une méthode générale de calcul des systèmes portants et/ou propulsifs minces.
Thèse de doctorat, Université d'Orléans.
- A. LEROY, PH. DEVINANT (1999).
A general approach for computing 3D unsteady lifting and/or propulsive systems derived from a complete theory.
Int. J. Num. Meth. in Fluids **29**, 75–95.
- B. MICHEA (1992).
Etude des sillages de rotors d'hélicoptères en vol d'avancement et de leur influence sur les performances du rotor.
Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- M. MUDRY (1982).
La Théorie générale des nappes et filaments tourbillonnaires et ses applications à l'aérodynamique instationnaire.
Thèse de doctorat d'Etat, Université Paris 6.
- A. D. POLYANIN, A. V. MANZHIROV (1998).
Handbook of Integral Equations.
CRC Press.
- L. PRANDTL (1920).
Theory of Lifting Surfaces, part 1.
Tech. Notes **9**, NACA.
- L. PRANDTL (1923).
Applications of Modern hydrodynamics to Aeronautics.
Tech. Rep. **116**, NACA.
- S. PRÖSSDORF, D. TORDELLA (1991).
On an extension of Prandtl's Lifting Line Theory to curved wings.
Imp. Comp. in sc. and Eng. **3**, 192–212.

-
- E. REISSNER (1944).
On the general theory of thin airfoils for nonuniform motion.
Tech. Notes **946**, NACA.
- A. SELIER (1990).
Une théorie unifiée de la ligne portante.
Thèse de doctorat, Université Paris 6, France.
- J.K. THURBER (1965).
An asymptotic method for determining the lift distribution of a swept-back wing of finite span.
Commun. Pure App. **18**, 733–756.
- F. TOULMAY (1986).
Modèle d'étude de l'aérodynamique du rotor
Rapport Aérospatiale R371.76
- M. VAN DYKE (1964).
Perturbation methods in fluid mechanics.
Academic Press, New York.
- M. VAN DYKE (1982).
An Album of Fluid Motion.
Parabolic Press, Stanford, CA.
- J. VAN HOLTEN (1977).
Some notes on unsteady lifting line theory.
J. Fluid Mech. **77**, 561–579.
- J. WEISSINGER (1947).
The lift distribution of swept-back wings.
NACA Tech. mem. **1120**.

Résumé

Après avoir rappelé les principaux travaux concernant la ligne portante et le traitement numérique des intégrales en partie finie au sens d'Hadamard, nous exposons une formulation implicite de ligne portante stationnaire pour des ailes courbes et en flèche. Nos résultats ont été comparés avec la théorie de Prandtl puis validés par une méthode de surface portante. L'accord obtenu en terme de circulation, même pour des ailes fortement courbées, est probant.

Nous proposons une méthode de marche en temps pour la ligne portante instationnaire courbe et en flèche. Sur la base des travaux de Sellier (1991), nous utilisons une décomposition du sillage instationnaire, mêlant doublets surfaciques constants et variant linéairement. Appliquée explicitement pour une mise en incidence impulsive, cette méthode donne des résultats, notamment pour des ailes de forte courbure, qui montrent d'une part une consistance temporelle et d'autre part un accord satisfaisant avec une méthode VLM instationnaire.

Mots-clés : ligne portante, courbe, flèche, partie finie, instationnaire

Abstract

Development of an unsteady approach for curved and swept lifting lines numerical computation

After having reviewed main works about lifting-line and numerical treatment of Hadamard's sens finite part integrals, we expose an implicit formulation of a steady lifting line for curved and swept wings. We first compare our results with Prandtl's lifting line theory and then validate them with a lifting surface method. We show good accordance in terms of circulation even with highly curved wings.

We propose an implicit method for unsteady curved and swept lifting line time-marching numerical computation. On the basis of Sellier (1991), we split the unsteady wake which is shown as a linear varying and constant strength doublets sheet. A numerical implementation is drawn in the case of the instantaneous gust entry. The results, even for highly curved wings, are consistent relative to time discretization with good accordance with unsteady lifting surface methods.

Keywords: lifting line, curve, sweep, finite part, unsteady

Discipline : Mécanique des fluides, Énergétique, Thermique, Combustion

École Polytechnique d'Orléans
Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique
8 rue Léonard de Vinci, 45072 Orléans Cedex 2